

---

## Un critère informationnel en imagerie pour l'échelle optimale d'observation d'une scène bruitée

**Agnès Delahaies\*** — **David Rousseau\*** — **Jean-Marc Breteau \*\*** — **François Chapeau-Blondeau \***

*\* Laboratoire d'Ingénierie des Systèmes Automatisés (LISA), Université d'Angers, 62 avenue Notre Dame du Lac, 49000 Angers, France.*

david.rousseau@univ-angers.fr

*\*\*Laboratoire de Physique de l'État Condensé (LPEC), Université du Maine, avenue Olivier Messiaen, 72085 Le Mans, France*

---

*RÉSUMÉ. En imagerie, la question de l'échelle d'observation d'une scène est conventionnellement laissée à l'appréciation de l'expérimentateur qui a seul la charge du choix du grossissement du système imageur. De façon souvent découplée, le traicteur de données récupère les images après acquisition et, à partir de là, cherche à extraire aux mieux les informations dans la scène. Dans ce travail, nous illustrons sur un exemple l'intérêt d'une approche acquisition-traitement conjoint. Nous montrons au moyen d'outils quantitatifs issus de la théorie statistique de l'information comment le choix de l'échelle d'observation en imagerie peut être directement relié aux performances de la tâche finale de traitement de l'information. Le propos est illustré sur des systèmes d'imagerie bruitée utiles pour le domaine biomédical et l'instrumentation en optique cohérente.*

*MOTS-CLÉS: analyse en échelle, imagerie, théorie de l'information, capacité informationnelle.*

*KEYWORDS: scaling analysis, imaging, information theory, information capacity.*

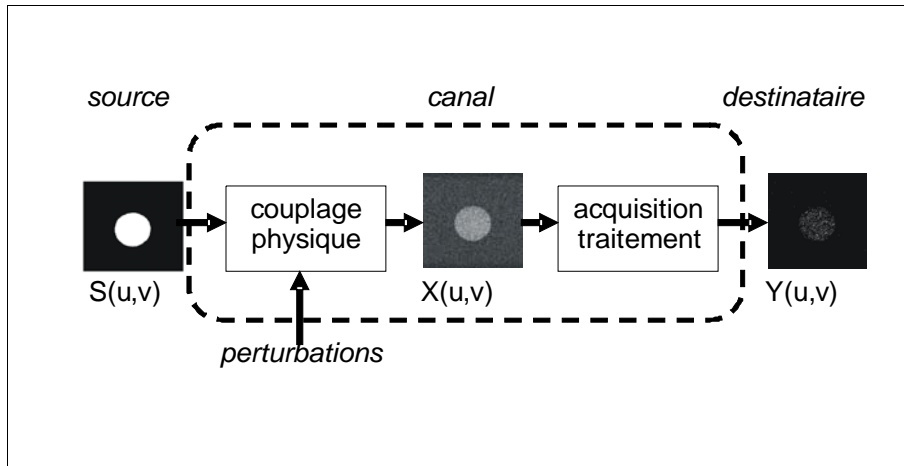
---

## 1. Introduction

Dégager un objet d'un fond est une tâche courante en imagerie. En l'absence de bruit, l'objet se dégage parfaitement du fond et l'échelle optimale d'observation, celle qui permet par exemple d'estimer au mieux la surface de l'objet, est la plus petite échelle qui permet de voir entièrement l'objet. En présence de bruit, la distinction entre fond et objet est perturbée. Le sens commun prévoit qu'une échelle intermédiaire, ni trop grande pour avoir suffisamment de résolution, ni trop petite pour que le fond soit suffisamment défini, soit à privilégier. Dans ce travail, nous proposons d'apporter une réponse quantifiée à ce problème pratique et interdisciplinaire au moyen d'outils issus de la théorie statistique de l'information. Nous illustrons ce point de vue original avec des exemples d'imageries bruitées utiles pour le domaine biomédical (imagerie par résonance magnétique (IRM)) et l'instrumentation optique (imagerie de speckle).

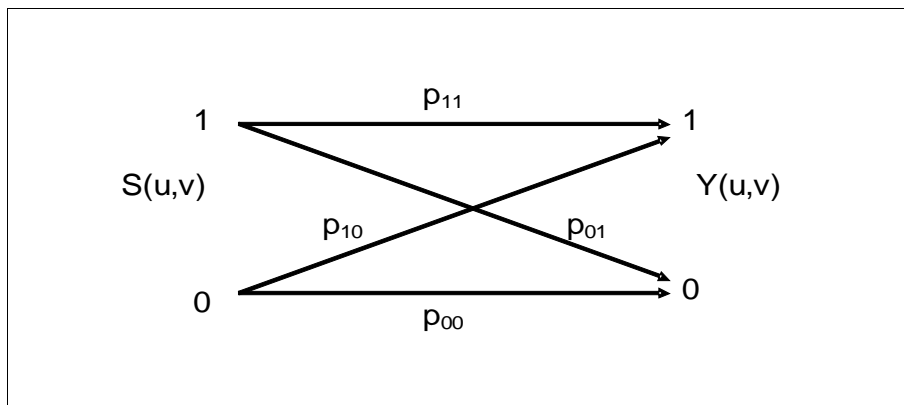
## 2. Imagerie et capacité informationnelle

En théorie statistique de l'information (Cover, 1991), un canal de communication est constitué d'une source qui délivre un message à un destinataire via un canal perturbé par du bruit. La capacité informationnelle d'un canal de communication est défini comme (Cover, 1991),  $C = \max \{Pr_{\{S\}} : I(S;Y)\}$ , où  $S$  est l'entrée du canal et  $Y$  sa sortie.  $I(S;Y)$  est l'information mutuelle entrée-sortie  $I(S;Y)=H(Y)-H(Y|S)$  avec  $H(\cdot)$  l'entropie de Shannon (Cover, 1991). La capacité informationnelle  $C$  est la quantité d'information maximale qui peut être transmise correctement via le canal informationnel. Le bruit étant imposé, la capacité est obtenue en ajustant le seul paramètre libre, la distribution de probabilité  $Pr_{\{S\}}$  de l'entrée  $S$ . La modélisation de canaux de communication et le calcul de leur capacité informationnelle sont plutôt classiquement destinés aux contextes de télécommunication où les signaux transmis sont des signaux monodimensionnels. Ici,  $S(u,v)$  et  $Y(u,v)$  seront des images, où  $(u,v)$  sont les coordonnées spatiales. Nous modélisons la situation d'un objet seul sur un fond en choisissant l'image d'entrée  $S(u,v)$  comme binaire. Notre scène est ainsi constituée d'un objet défini par un niveau de gris uniforme  $I_1$  et un fond également uniforme à  $I_0$ . La densité de probabilité associée à  $S(u,v)$  est  $p_S(s) = p_1\delta(s-I_1)+p_0\delta(s-I_0)$  où  $p_1 = 1-p_0$  est la fraction de pixels à  $I_1$ , c'est-à-dire la surface relative de l'objet dans l'image  $S(u,v)$ . Le paramètre clé de notre problème est donc  $p_1$  qui représente bien l'échelle à laquelle l'objet est observé dans l'image. Ainsi, la valeur de  $p_1$  qui permet d'obtenir la capacité  $C$  d'un canal modélisant un imageur, définit une échelle optimale à laquelle on observe le mieux (d'un point de vue informationnel) l'objet sur le fond. La Fig. 1 illustre la chaîne d'acquisition et de traitement des images que nous considérons comme un canal de communication tel qu'on le définit en théorie statistique de l'information (Cover, 1991).



**Figure 1.** Imagerie vue comme un canal de communication.  $X(u,v)$  est une image intermédiaire correspondant à l'image produite par la physique sur le capteur avant acquisition et traitement.

Pour illustration, on choisit, pour des raisons méthodologiques, de modéliser un imageur simple où les images en sortie  $Y(u,v)$ , au niveau du capteur ou bien après traitement, sont binaires  $Y(u,v) \in \{0,1\}$ . Le canal de communication de la Fig. 1 est donc équivalent au canal binaire de la Fig. 2. L'information mutuelle entrée-sortie  $I(S;Y)$  peut être calculée à partir des entropies  $H(Y) = h[p_{11}p_1 + (1-p_{00})(1-p_1)] + h[(1-p_{11})p_1 + p_{00}(1-p_1)]$  avec la fonction  $h(u) = -u \log_2(u)$ , et  $H(Y|S) = (1-p_1)[h(p_{00}) + h(1-p_{00})] + p_1[h(p_{11}) + h(1-p_{11})]$  où les probabilités  $p_{ij} = \Pr\{Y=i|S=j\}$ .



**Figure 2.** Canal binaire.

La dérivée de  $I(S;Y)$  par rapport à l'échelle d'observation  $p_1$  peut ensuite être calculée, et mène à l'échelle optimale d'observation  $p_1^*$  qui maximise  $I(X;Y)$  et atteint la capacité informationnelle  $C$  du canal binaire modélisant l'imageur. Ainsi, la question d'une échelle optimale d'observation d'un objet sur un fond trouve une solution analytique avec l'expression

$$p_1^* = \frac{ap_{00} - 1}{a(p_{00} + p_{11} - 1)} \quad [1]$$

$$\text{avec } a = 1 + \exp \left[ \ln(2) \frac{h(p_{00}) + h(1 - p_{00}) - h(p_{11}) - h(1 - p_{11})}{p_{00} + p_{11} - 1} \right].$$

### 3. Applications

Lorsque l'objet et le fond de la scène à imager présentent le même bruit, c'est-à-dire quand on a  $p_{00} = p_{11}$ , on obtient d'après l'Éq. [1]  $p_1^* = 1/2$ . L'échelle optimale d'observation est obtenue lorsque le fond représente la même surface que l'objet. Dans cette situation, le sens commun évoqué en introduction fonctionne. On rencontre cette situation en pratique lorsque le couplage signal-bruit est additif en présence par exemple de bruit d'origine thermique sur les capteurs. Le sens commun est mis en défaut à  $p_1^* \neq 1/2$ , lorsque  $p_{00} \neq p_{11}$ . Dans ce cas, l'échelle optimale d'observation, quantifiée par l'Éq. [1], revient à favoriser la surface relative accordée à l'item (objet ou fond) le moins bruité. On rencontre ces situations avec les bruits non additifs par exemple en imagerie cohérente avec le bruit de speckle ou encore en IRM avec du bruit Ricien qui sont communément (Goodman, 2007) modélisés comme des bruits multiplicatifs. La modélisation de ces contextes applicatifs pluridisciplinaires dans le cadre de notre étude est obtenue directement en explicitant le couplage signal-bruit qui permet de passer de l'image d'entrée  $S(u,v)$  à l'image intermédiaire  $X(u,v)$  dans la Fig. 1, et en introduisant un seuil de binarisation en sortie du canal. C'est ce que nous proposons dans la suite de cette section.

#### 3.1 Exemple en imagerie cohérente

Nous modélisons une situation typique d'imagerie cohérente (SAR, sonar, laser) où une onde monochromatique éclaire la scène à imager avec une phase uniforme dans l'espace. On suppose que la scène éclairée qui reçoit l'onde incidente est porteuse d'un contraste binaire en réflexion qui représente l'image d'entrée  $S(u,v)$  dans la Fig. 1. En se réfléchissant, l'onde incidente voit sa phase perturbée par les variations microscopiques dues à la rugosité inhérente de la scène, à l'échelle de la longueur d'onde. L'image créée sur le capteur d'image est l'image intermédiaire

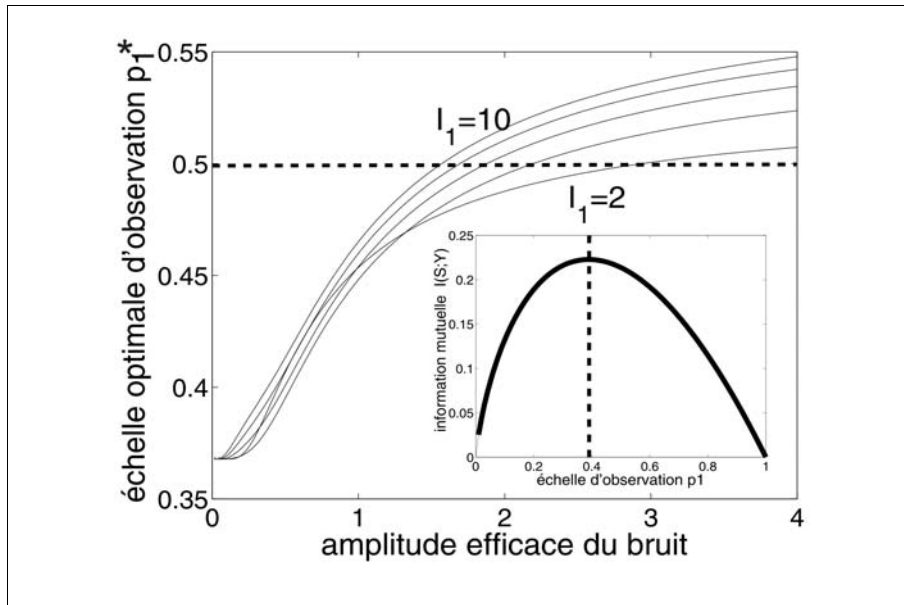
$X(u,v)$  dans la Fig. 1. Sur le capteur d'image, certaines variations de la phase s'additionnent constructivement donnant de fortes intensités, d'autres interfèrent destructivement en donnant de faibles intensités. Il en résulte des variations d'intensités aux allures granulaires appelées bruit de tavelure ou speckle, qui peuvent être modélisées par un couplage signal-bruit multiplicatif (Goodman, 2007). L'image intermédiaire arrivant sur le capteur est alors décrite par  $X(u,v)=S(u,v)\times N(u,v)$ , avec la densité de probabilité  $p_N(j)$  du bruit de speckle  $N(u,v)$  qui est donnée par

$$p_N(j) = \frac{1}{\sigma_N} \exp\left(-\frac{j}{\sigma_N}\right) \quad \text{pour } j \geq 0 \quad [2]$$

avec l'amplitude efficace  $\sqrt{2}\sigma_N$  du bruit de speckle. On peut exprimer les probabilités conditionnelles  $p_{ij}$  de la Fig. 2,  $p_{00} = F_N\left(\frac{\theta}{I_0}\right)$ ,  $p_{11} = 1 - F_N\left(\frac{\theta}{I_1}\right)$ ,

$p_{ij} = 1 - p_{ii}$  et la fonction de répartition  $F_N(j) = 1 - \exp\left(-\frac{j}{\sigma_N}\right)$ . L'amplitude efficace

du bruit de speckle peut être réglée expérimentalement par l'intensité de la source cohérente.



**Figure 3.** Échelle optimale d'observation en fonction de l'amplitude efficace du bruit de speckle  $\sqrt{2}\sigma_N$ . L'image binaire d'entrée  $S(u,v)$  porte les niveaux  $I_0 = 1$  et

*différentes valeurs de  $I_1 = 2, 4, 6, 8, 10$ . Le seuil de binarisation est fixé  $\theta = 1$ . En encart, l'information mutuelle  $I(S;Y)$  en fonction de l'échelle d'observation  $p_1$  pour un niveau de bruit de speckle fixé  $\sigma_N = 0.1$  et  $I_1=10, I_0=1$  on a  $p_1^* = 0.39$*

Sur la Fig. 3, on observe l'évolution de l'échelle optimale pour un seuil  $\theta$  fixé en fonction de l'amplitude efficace du bruit de speckle. Suivant le niveau de bruit dans la scène, il faut parfois privilégier la surface accordée à l'objet  $p_1^* > 0.5$  ou celle occupée par le fond  $p_1^* < 0.5$ . Cela montre que le choix d'une échelle d'observation n'est pas un paramètre expérimental sans conséquence d'un point de vue informationnel. Ainsi, une modélisation physique de la scène à imager peut être utilisée pour maximiser la transmission d'information lors du choix du grossissement d'un système imageur.

### 3.2 Exemple en imagerie par résonance magnétique (IRM)

On considère à présent l'image intermédiaire  $X(u,v)$  de la Fig.1 comme étant l'image module obtenue lors d'une acquisition en IRM. Le bruit dans l'image module en IRM est usuellement (Gravel, 2004) modélisé comme un bruit Ricien de densité de probabilité

$$p_{X|s}(x) = \frac{x}{\sigma_N^2} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_N^2}(x^2 + s^2)\right] B_0\left(\frac{\sqrt{2sx}}{\sigma_N}\right), \quad [3]$$

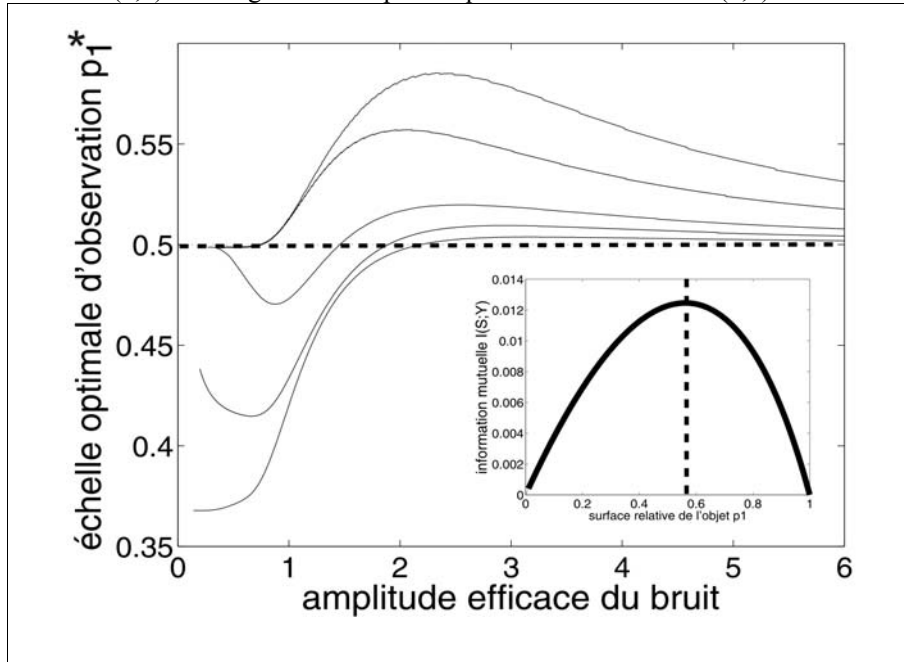
pour  $x \geq 0$  et 0 pour  $x < 0$  où la fonction de Bessel  $B_0(z) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \exp(z \cos \varpi) d\varpi$ .

$S(u,v)$  est toujours une image binaire définie par deux niveaux  $I_1$  pour l'objet et un fond à  $I_0$ . On peut ainsi calculer les probabilités conditionnelles  $p_{ij}$  du schéma de la Fig. 2 avec  $p_{11} = 1 - F_{X|s=I_1}(\theta)$ ,  $p_{00} = F_{X|s=I_0}(\theta)$ ,  $p_{ij} = 1 - p_{ii}$  et la fonction

de répartition  $F_{X|s=I_1}(j) = Q_{\lambda^2}(\lambda) \left(\frac{\theta}{\sigma_N}\right)$  où  $\lambda = \frac{2I_1^2}{\sigma_N^2}$  (Kay, 1993). Pour

illustration, les images disposées sur la Fig.1 ont été obtenues expérimentalement au moyen d'un système Bruker Avance DRX 7 tesla avec une séquence d'écho de spin classique où l'objet est un tube rempli d'eau dopée avec une solution de NiCl<sub>2</sub> et MnCl<sub>2</sub> à 0,1 mMol solution. Le paramètre  $\sigma_N$  dans l'Éq. [3], est l'amplitude efficace du bruit gaussien centré qui intervient au niveau du récepteur, là où se produit l'échantillonnage avant la reconstruction par transformée de Fourier de  $X(u,v)$ . L'amplitude efficace  $\sigma_N$  du bruit peut être contrôlée par le réglage de la bande passante du récepteur. Plus cette bande passante est petite, plus  $\sigma_N$  est petit. Sur la Fig. 4, on constate qu'il existe des situations où l'échelle optimale d'observation n'est pas  $p_1^* = 0.5$ . Le cadre théorique décrit ici permet de déterminer l'échelle

optimale pour maximiser le transfert d'information mutuelle entre la scène physique d'entrée  $S(u,v)$  et l'image obtenue après acquisition et traitement  $Y(u,v)$ .



**Figure 4.** Échelle optimale d'observation en fonction de l'amplitude efficace  $\sigma_N$  du bruit gaussien présent au niveau du récepteur de l'antenne d'un IRM. L'image binaire d'entrée  $S(u,v)$  porte les niveaux  $I_0 = 0$  et différentes valeurs  $I_1 = 0.5, 0.75, 1, 2, 4$  en allant de bas en haut. Le seuil de binarisation est fixé  $\theta = 1$ . En encart, l'information mutuelle entrée-sortie  $I(S;Y)$  en fonction de l'échelle d'observation  $p_1$  pour un niveau de bruit de bruit gaussien  $\sigma_N = 3$  et  $I_1 = 4, I_0 = 0$  on a  $p_1^* = 0.57$ .

#### 4. Conclusion

Dans ce travail nous avons montré comment la capacité informationnelle pouvait être utilisée pour appréhender la question expérimentale du choix d'une échelle d'observation. Pour illustration, nous avons pris des exemples simples d'images binaires perturbées par des bruits aux propriétés statistiques typiques de l'imagerie cohérente et de l'IRM. La partie traitement se résumait ici en une simple classification binaire objet/fond. Nous avons montré qu'une expression analytique exacte est possible pour l'échelle optimale d'observation. Il serait toutefois possible à partir du cadre simplifié de ce travail de complexifier le traitement de classification (il suffit alors d'estimer les probabilités de transitions dans le canal), le nombre de

classes (il suffit alors d'augmenter le nombre d'entrées et de sorties au canal), ou encore de considérer d'autres types d'imageries en environnement bruitée (il suffit alors de reconsidérer la physique au niveau du capteur). Faire varier l'échelle d'observation revient expérimentalement à faire varier le grossissement du système imageur. Aux forts grossissements, il est courant que de nouvelles sources de bruit interviennent liées à des aberrations dues au système imageur (aberration géométrique en imagerie optique, inhomogénéité du champ magnétique en IRM par exemple). Ces bruits liés au grossissement n'ont pas été pris en compte ici et des développements dans cette direction constituent là aussi des perspectives intéressantes.

Dans ce rapport, nous avons examiné de façon conjointe des questions liées à l'acquisition et au traitement des données issues de l'acquisition. C'est une approche originale puisque ces deux étapes sont habituellement considérées séparément. D'autres critères informationnels pourraient être proposés sur la question de l'échelle optimale d'observation suivant la finalité du traitement envisagé. On pourrait par exemple utiliser la complexité stochastique minimale (Rissanen, 2007) en détection ou encore l'information au sens de Fisher (Frieden, 2004) pour de l'estimation. Pour les scènes considérées, nous avons supposé des objets simples occupant une surface bien définie. On pourrait également poser la question de l'échelle optimale d'observation sur des scènes comportant des objets aux structures plus complexes avec des propriétés d'invariances en échelles comme des objets «fractals» (Barnsley, 1993) qui donnent à voir les mêmes structures quelle que soit l'échelle d'observation. En pratique, pour les objets fractals que l'on rencontre dans la nature cette propriété d'invariance d'échelle existe uniquement sur une gamme d'échelle et il serait intéressant de regarder là aussi si une échelle optimale d'observation peut exister pour des tâches définies de traitement de l'information.

## 5. Bibliographie

- Cover T. M., *Elements of Information Theory*, New York, Wiley, 1991.
- Kay S. M., *Fundamental of Statistical Signal Processing, vol II Detection theory*, Saddle River, Prentice Hall, 1993.
- Goodman J. W., *Speckle Phenomena in Optics*, Englewood, Roberts & Company, 2007.
- Rissanen J., *Information and Complexity in Statistical Modeling*, Berlin, Springer, 2007.
- Barnsley M. F., *Fractals everywhere*, San Francisco, Morgan Kaufmann, 1993.
- Frieden B. R., *Science from Fisher Information: A Unification*, Cambridge, University Press, 2004.
- Gravel P., Beaudoin G., De Guise J.A., « A method for modeling noise in medical images », *IEEE Transactions on Medical Imaging*, vol. 23, n°10, 2004, p. 1221-1232.