Journées Automatique et Télécommunications du Club EEA (Électronique, Électrotechnique, Automatique)
pp. 61–67, Bordeaux, France, 12–14 mars 2001.

Systèmes dynamiques (max, +) pour la modélisation et la synthèse de trafic à longue dépendance statistique

François Chapeau-Blondeau, Abdelilah Monir

Laboratoire d'Ingénierie des Systèmes Automatisés (LISA), Université d'Angers
62 avenue Notre Dame du Lac, 49000 ANGERS, FRANCE
http://www.istia.univ-angers.fr/~chapeau/

Résumé : Nous proposons un modèle utilisant les systèmes dynamiques (max, +) pour la génération de signaux aléatoires possédant de la longue dépendance statistique identifiée par des corrélations décroissant en loi de puissance munie d'un exposant contrôlable. Ce modèle prend la forme d'une simple récurrence d'ordre un directement implémentable numériquement, ce qui le rend très adapté pour la synthèse en ligne de longue dépendance sur des horizons temporels potentiellement illimités. Ce type de signaux à longue dépendance peut servir de modèle pour le trafic dans les réseaux de télécommunication, avec des applications pour la simulation de ces réseaux et de l'évolution de leurs performances.

1 Introduction

La longue dépendance statistique dans les signaux aléatoires identifie la présence de corrélations à longue portée, c'est-à-dire décroissant moins vite qu'exponentiellement. Typiquement, ces corrélations statistiques décroissent en loi de puissance, ce qui leur confère des propriétés d'autosimilarité ou encore une nature fractale [1, 2]. De tels comportements traduisent, pour les processus générant les signaux considérés, un caractère aléatoire et néanmoins fortement structuré, et spécialement des structurations sur plusieurs échelles temporelles ou spatiales. Ces comportements ont été récemment observés dans des processus complexes d'intérêt technologique tel le trafic sur les réseaux de télécommunication. La longue dépendance a ainsi été mesurée sur différentes grandeurs liées au télétrafic, comme par exemple les temps de propagation entre nœuds des réseaux [3], ou le nombre de paquets de données arrivant sur un nœud par unité de temps [4, 5], ou les instants d'arrivée de connexions [6, 7], ou encore les quantités d'octets pour transmettre des trames vidéo compressées [8].

La longue dépendance statistique est mal décrite par les modèles stochastiques usuels, et la modélisation, la simulation et le contrôle de tels comportements demeurent des problématiques ouvertes et importantes pour nombre de domaines. On sait que la longue dépendance statistique ne peut pas être produite par les systèmes dynamiques linéaires (tels que ceux considérés par l'Automatique de base) répondant à des excitations aléatoires. Relativement peu de modèles existent pour construire théoriquement des signaux aléatoires avec de la longue dépendance ainsi que pour en synthétiser des réalisations effectives. Les mouvements browniens fractionnaires [9, 10], ou les bruits blancs soumis à des intégrations fractionnaires [11, 12], offrent des modèles théoriques pour la longue dépendance. Toutefois, ces modèles sont en principe d'ordre infini, et pour une synthèse effective de réalisations, ils doivent être tronqués. Ceci conduit à des algorithmes de synthèse récursifs d'ordre fini, mais synthétisant de la longue dépendance limitée à un domaine ou une portée donnés. D'autres méthodes comme la factorisation de Cholesky ou la décomposition en ondeletttes [13, 14] réalisent une synthèse par blocs au lieu d'une synthèse récursive. Quand une réalisation de N points a été synthétisée, l'addition ultérieure d'un point supplémentaire avec de la corrélation longue nécessite une nouvelle synthèse d'un bloc complet de $N+1$ points.

Nous présentons ici une nouvelle approche pour la longue dépendance, basée sur l'utilisation d'une classe de systèmes dynamiques, les sytèmes dynamiques (max, +), qui sont notamment employés comme modèles en Automatique des systèmes à événements discrets [15, 16]. Nous montrons que de tels systèmes sont capables, dans certains régimes de fonctionnement, de produire de la longue dépendance statistique, et d'offrir pour elle des modèles et des algorithmes de synthèse d'implémentation très économique.

2 Le modèle de base

Nous considérons le système dynamique décrit par la récurrence d'ordre un :

$$X(k) = X(k-1) + x(k) , \quad (1)$$
$$Y(k) = \max[Y(k-1),\ X(k)] , \quad (2)$$
$$y(k) = Y(k) - Y(k-1) , \quad (3)$$

pour $k > 0$ entier, avec la condition initiale $X(0) = Y(0) = 0$. Pour tout $k > 0$, les quantités $x(k)$ de l'Éq. (1) formant la séquence d'entrée sont des variables aléatoires centrées indépendantes et identiquement distribuées. La séquence $y(k)$ de l'Éq. (3) est le signal de sortie qui présente des propriétés de longue dépendance.

Le système des Éqs. (1)–(3) peut être classé dans la catégorie des systèmes dynamiques (max, +) [15, 16]. Une autre interprétation est accessible dans le contexte des marches aléatoires : le signal $y(k)$ représente la succession des incréments du maximum courant $Y(k)$ de la marche aléatoire $X(k)$ d'incréments $x(k)$. Le système possède une propriété de renouvellement :

à chaque instant k où $y(k) > 0$, on a aussi $Y(k) = X(k)$ d'après l'Éq. (2), et donc pour l'évolution ultérieure de l'incrément y, tout se passe comme si à un tel instant k le système était remis à sa condition initiale $Y = X = 0$.

Typiquement, le signal $y(k)$ de l'Éq. (3) est formé de plages d'activité où $y > 0$ entrecoupées de plages où $y = 0$, ces successions se produisant à toutes les échelles de façon autosimilaire. Pour illustration, une évolution de $y(k)$ est présentée sur la Fig. 1, lorsque le signal d'entrée de l'Éq. (1) est $x(k) = \pm 1$ équiprobablement. La Fig. 1 montre $y(k)$ sur des intervalles de longueurs croissantes, révélant son caractère autosimilaire.

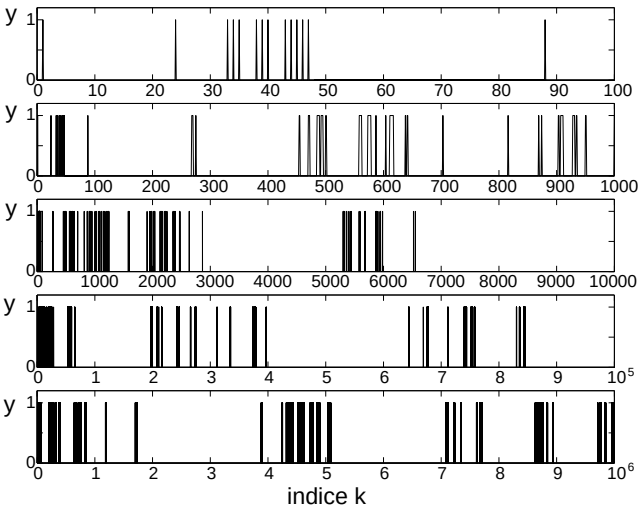

Figure 1: Une réalisation du signal $y(k)$ des Éqs. (1)–(3) quand $x(k) = \pm 1$, représentée sur des intervalles de longueurs croissantes montrant l'autosimilarité.

La longue dépendance de $y(k)$ peut être caractérisée au moyen de sa fonction d'autocorrélation $R(k,\tau) = \mathrm{E}[y(k)y(k+\tau)]$. La Fig. 2 représente une autocorrélation empirique évaluée comme la moyenne $N^{-1}\sum_{k=1}^{N} y(k)y(k+\tau)$ sur une réalisation de $y(k)$ avec $x(k) = \pm 1$ équiprobablement et $N = 10^7$. La Fig. 2 révèle une évolution de l'autocorrélation en loi de puissance $\tau^{-\beta}$ en fonction du retard τ avec l'exposant $\beta = 0.5$.

3 Analyse théorique

Il est possible de justifier théoriquement l'évolution en loi de puissance de la fonction d'autocorrélation de $y(k)$. Cherchons à calculer la fonction d'autocorrélation $R(k,\tau) = \mathrm{E}[y(k)y(k+\tau)]$ pour tous les entiers $k > 0$ et $\tau \geq 0$. Nous considérons d'abord le cas simple de l'entrée binaire $x(k) = \pm 1$ équiprobablement. Dans ce cas les valeurs accessibles à l'incrément $y(k)$ se réduisent à 0 ou 1. On a donc

$$R(k,\tau) = 1 \times 1 \times \Pr\{y(k) = 1\ ;\ y(k+\tau) = 1\} \quad (4)$$
$$= \Pr\{y(k+\tau) = 1 | y(k) = 1\} \Pr\{y(k) = 1\} \quad (5)$$

À cause de la propriété de renouvellement du processus, on a $\Pr\{y(k+\tau) = 1 \,|\, y(k) = 1\} = U(\tau)$,

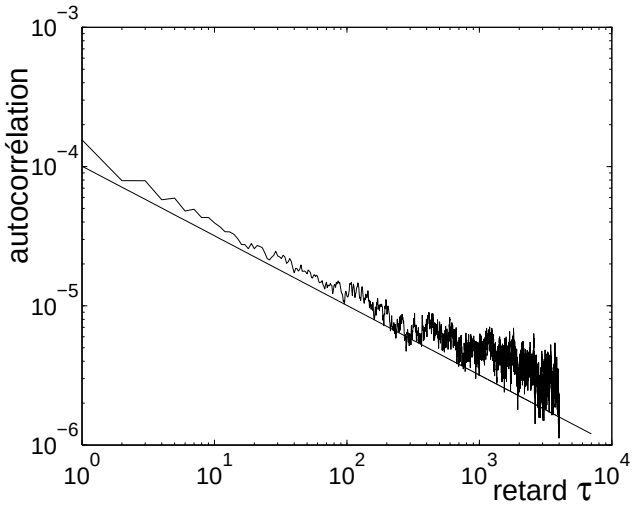

Figure 2: Fonction d'autocorrélation empirique de l'Éq. (11) quand $x(k) = \pm 1$, superposée à son espérance de l'Éq. (12) (ligne droite).

une fonction qui ne dépend que de l'écart τ, et qui vérifie en particulier $U(0) = 1$, et $U(k) = \Pr\{y(k) = 1\} = \mathrm{E}[y(k)] = \mathrm{E}[y^2(k)]$ pour tout $k > 0$. On obtient donc $R(k,\tau) = U(k)U(\tau)$.

La fonction $U(\tau)$ peut s'exprimer, en fonction des propriétés de la marche aléatoire $X(k)$ d'incréments $x(k) = \pm 1$, comme

$$U(\tau) = \sum_{n=1}^{\tau} u(n,\tau) \quad (6)$$

pour l'entier $\tau \geq 1$, où $u(n,\tau)$ est la probabilité de premier passage en $X = n$ au pas τ de la marche aléatoire X partie de $X = 0$ au pas 0. Ceci est dû au fait que $y(k) = 1$ équivaut, d'après l'Éq. (2), à un premier passage de la marche X au pas k.

D'après [17] (p. 89 Éq. (7.5)), on a $u(n,\tau) = 0$ pour n et τ de parité opposée, et pour n et τ de même parité

$$u(n,\tau) = \frac{2^{-\tau}}{\tau}\, n\ \mathrm{bino}[\tau, (\tau+n)/2]\ , \quad (7)$$

où bino(. , .) représente les standard coefficients du binôme de Newton.

La somme de l'Éq. (6) peut s'évaluer explicitement, et au moyen de la formule de Stirling du factoriel, son comportement asymptotique[1] pour $\tau \gg 1$ peut s'exprimer comme

$$U(\tau) = a\tau^{-1/2}\ , \qquad \tau \text{ grand}, \quad (8)$$

avec la constante $a = 1/\sqrt{2\pi} \approx 0.40$. On a donc pour le signal aléatoire $y(k)$, l'espérance

$$\mathrm{E}[y(k)] = ak^{-1/2}\ , \qquad k \text{ grand}, \quad (9)$$

[1] Notons que le régime asymptotique est approché rapidement, car dès $\tau = 5$ l'erreur relative tombe sous 5 % pour l'Éq. (8) par rapport à la valeur exacte résultant des Éqs. (6)–(7).

et la fonction d'autocorrélation

$$R(k,\tau) = \mathrm{E}[y(k)y(k+\tau)] = a^2(k\tau)^{-1/2}\ , \quad k,\tau \text{ grands}, \tag{10}$$

ce qui établit $y(k)$ comme un signal aléatoire non stationnaire asymptotiquement autosimilaire (au moins au sens large) ou fractal [2].

On peut définir une fonction d'autocorrélation empirique comme

$$R_{\mathrm{emp}}(\tau) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} y(k)y(k+\tau)\ . \tag{11}$$

En vertu de l'Éq. (10), on a l'espérance

$$\mathrm{E}[R_{\mathrm{emp}}(\tau)] = \frac{2a^2}{\sqrt{N}}\,\tau^{-1/2}\ , \qquad N,\tau \text{ grands}, \tag{12}$$

qui présente donc un comportement asymptotique en $\tau^{-\beta}$ aux longs retards τ, avec $\beta = 1/2$. À ceci on peut associer, par transformée de Fourier, un spectre empirique [2]

$$S(f) \sim \frac{1}{f^{1/2}}\ , \qquad f \text{ petit}, \tag{13}$$

qui présente donc un comportement asymptotique en $1/f^{\alpha}$ aux basses fréquences, avec $\alpha = 1-\beta = 1/2$. Ces évolutions en lois de puissance établissent $y(k)$ comme un signal aléatoire à longue dépendance ou encore comme un bruit en $1/f^{\alpha}$.

4 Simulation numérique

Les propriétés établies théoriquement pour le signal aléatoire $y(k)$, peuvent aussi être testées expérimentalement, puisque ce signal peut très aisément être simulé numériquement au moyen des Éqs. (1)–(3) qui le définissent. De plus, comme il s'agit d'équations récursives d'ordre un, la simulation numérique peut être poursuivie sur des horizons temporels arbitrairement longs, permettant de contrôler la convergence des estimateurs empiriques.

La Fig. 2 compare une réalisation de la fonction d'autocorrélation empirique $R_{\mathrm{emp}}(\tau)$ de l'Éq. (11) avec son espérance théorique de l'Éq. (12), corroborant l'évolution en loi de puissance $\tau^{-\beta}$ d'exposant $\beta = 1/2$. La transformée de Fourier de cette réalisation donne l'estimation du spectre empirique de la Fig. 3 qui montre une variation en $1/f^{1/2}$ conformément à l'Éq. (13).

À l'instar des propriétés asymptotiques des marches aléatoires standard [17], la structure à long terme de l'autocorrélation $R(k,\tau)$ (à k, τ grands) est insensible à la distribution statistique de l'entrée, ou incréments élémentaires, $x(k)$. Des distributions binaires, gaussiennes, uniformes, laplaciennes, ont été testées pour $x(k)$ [18, 19], vérifiant que la longue dépendance est préservée comme dans l'Éq. (10), et spécialement son exposant $\beta = 1/2$ (voir Fig. 4).

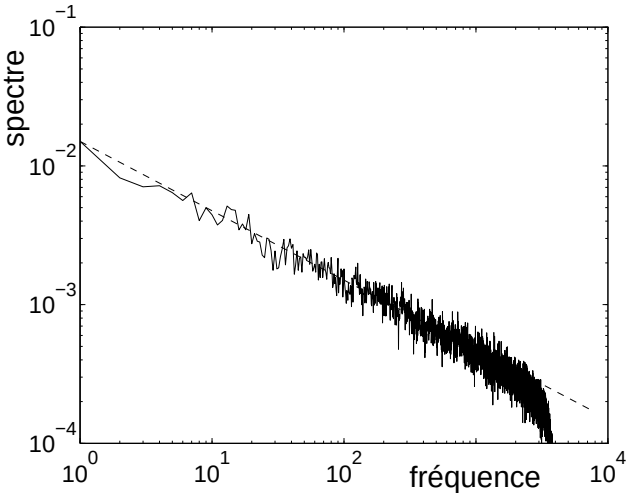

Figure 3: Spectre empirique résultant de la transformation de Fourier de l'autocorrélation de la Fig. 2, superposé à la droite de pente $-1/2$ (tirets) conformément à l'Éq. (13).

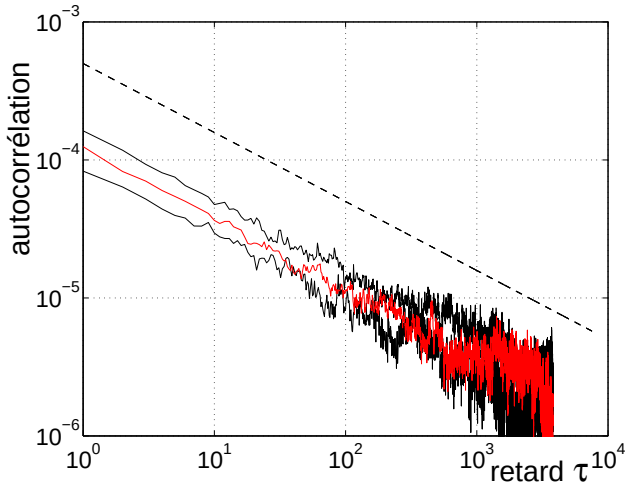

Figure 4: Trois réalisations de la fonction d'autocorrélation empirique de l'Éq. (11) pour un signal d'entrée $x(k)$ d'écart-type unité et de distribution gaussienne (haut), uniforme (milieu), laplacienne (bas). La droite en tirets est de pente $-1/2$.

5 Évolution du modèle

Les corrélations en loi de puissance $\tau^{-\beta}$ d'exposant $\beta = 1/2$ sont donc préservées de façon robuste vis-à-vis de la distribution du signal d'entrée $x(k)$. Néanmoins, pour plus de flexibilité, il est souhaitable de pouvoir faire évoluer cet exposant β de la longue dépendance. Un moyen possible est d'introduire un gain non stationnaire $g(k)$ conformément à l'algorithme de la Fig. 5 [20]. L'évolution du gain se fait selon une loi de puissance $g(k) = (k-k_0)^b$ munie d'un exposant b qui offre un moyen de contrôle sur l'exposant β de la longue dépendance.

Une évolution typique du signal $y(k)$ produit selon la Fig. 5, avec $b = 0.2$, est représenté sur la Fig. 6,

$X(0) = Y(0) = 0$
$k = 1;\ k_0 = 0$
<u>Repeat</u>
  $g(k) = (k - k_0)^b$
  $X(k) = X(k-1) + g(k)x(k)$
  $Y(k) = \max[Y(k-1),\ X(k)]$
  $y(k) = Y(k) - Y(k-1)$
  <u>If</u> $y(k) > 0$ <u>then</u> $k_0 \leftarrow k$ <u>End If</u>
  $k \leftarrow k + 1$
<u>Until</u> an exit condition is true

Figure 5: Modèle avec gain non stationnaire $g(k)$ offrant un contrôle sur l'exposant de la longue dépendance.

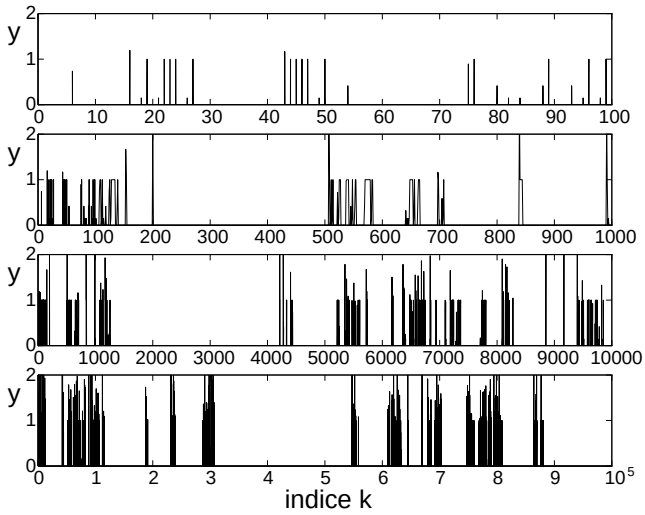

Figure 6: Une réalisation du signal $y(k)$ du modèle non stationnaire de la Fig. 5 quand $x(k) = \pm 1$, représentée sur des intervalles de longueurs croissantes montrant l'autosimilarité.

sur des intervalles de longueurs croissantes, montrant l'autosimilarité.

Au contraire du modèle stationnaire où $g(k) \equiv 1$, avec un gain non stationnaire $g(k) = (k - k_0)^b$ il est beaucoup plus difficile d'établir une expression analytique pour la fonction d'autocorrélation $R(k, \tau) = \mathrm{E}[y(k)y(k+\tau)]$. Néanmoins, la récurrence de la Fig. 5 n'est guère plus difficile à simuler, rendant la fonction d'autocorrélation facilement accessible numériquement.

La Fig. 7 représente, pour le modèle non stationnaire, la fonction d'autocorrélation empirique de l'Éq. (11) évaluée sur une réalisation de $y(k)$ avec $N = 10^7$. Différentes valeurs de l'exposant b du gain sont testées sur la Fig. 7 montrant l'évolution résultante de l'exposant β de la loi de puissance des corrélations.

À partir d'estimations numériques de la fonction d'autocorrélation comme sur la Fig. 7, nous avons mesuré la pente $-\beta$ de la droite de régression pour

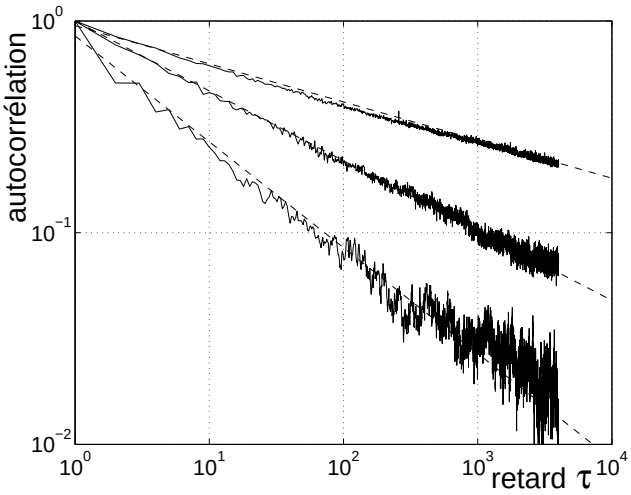

Figure 7: Fonction d'autocorrélation empirique de l'Éq. (11) pour $y(k)$ du modèle non stationnaire de la Fig. 5 avec $x(k) = \pm 1$, pour différentes valeurs de l'exposant b du gain $g(k)$ (traits pleins) : $b = 0$ (bas), $b = 0.2$ (milieu), $b = 0.4$ (haut), avec les droites de régression (pointillés) de pente $-\beta = -0.50$ (bas), $-\beta = -0.33$ (milieu) et $-\beta = -0.19$ (haut), révélant la décroissance en loi de puissance des corrélations.

différentes valeurs de l'exposant b. Ceci fournit l'évolution de l'exposant β des corrélations en loi de puissance, en fonction du paramètre de contrôle constitué par l'exposant b du gain $g(k)$. Cette évolution est représentée sur la Fig. 8, qui établit que l'exposant β peut être ajusté continûment entre 0 et 1/2 au moyen du paramètre b.

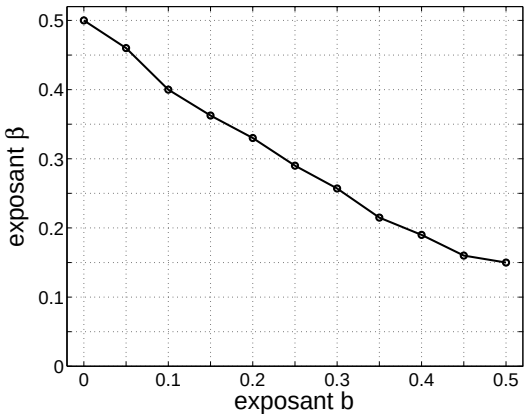

Figure 8: Évolution de l'exposant β des corrélations en loi de puissance, en fonction du paramètre de contrôle constitué par l'exposant b du gain non stationnaire $g(k)$ de la Fig. 5.

Quand le paramètre b dépasse 0.5, nous avons observé sur les estimations numériques, que la fonction d'autocorrélation de $y(k)$ tend graduellement à s'éloigner d'une droite dans un diagramme log-log comme la Fig. 7, pour donner lieu à une courbe concave ($\cup$) au lieu d'une droite. Cette tendance est illustrée sur la Fig. 9. Un tel comportement identifie

toujours de la longue dépendance dans le signal $y(k)$, mais d'une nature plus compliquée cette fois, se caractérisant par des corrélations tendant à décroître plus lentement qu'une loi de puissance.

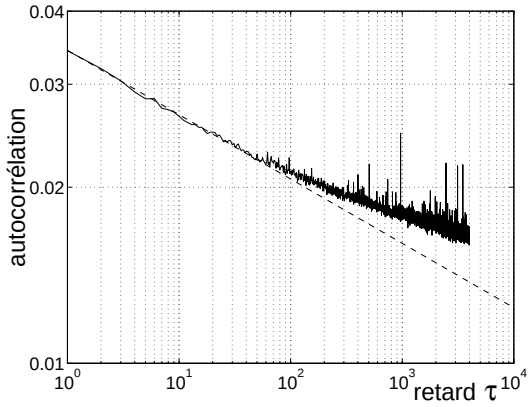

Figure 9: Fonction d'autocorrélation empirique de l'Éq. (11) pour $y(k)$ du modèle non stationnaire de la Fig. 5 avec $x(k) = \pm 1$ et $b = 0.6$ (trait plein), avec la droite de pente -0.11 (pointillés).

Notons que la forme en loi de puissance du gain $g(k) = (k - k_0)^b$ implémentée comme décrit sur la Fig. 5, est un élément clef pour obtenir des évolutions en loi de puissance de l'autocorrélation avec un exposant β modifiable, comme illustré sur le Fig. 7. En particulier, le repositionnement de k_0 chaque fois que $y(k) > 0$, comme exprimé sur la Fig. 5, est un ingrédient essentiel. Ne pas réaliser ce repositionnement, en utilisant simplement à la place un gain en loi de puissance de la forme $g(k) = k^b$ pour tout k, entraine une autocorrélation décroissant en loi de puissance invariablement avec un exposant $\beta = 0.5$, indépendant de b, comme illustré sur la Fig. 10.

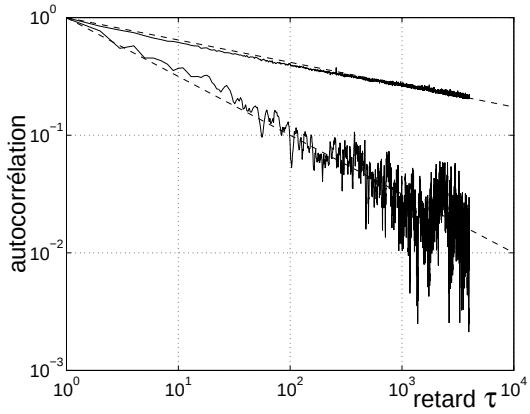

Figure 10: Fonction d'autocorrélation empirique de l'Éq. (11) pour $y(k)$ du modèle non stationnaire avec $x(k) = \pm 1$ et différentes formes pour le gain $g(k)$ (traits pleins) : $g(k) = (k - k_0)^{0.4}$ comme spécifié par la Fig. 5 (haut), $g(k) = k^{0.4}$ pour tout k (bas), avec les droites de régression (pointillés) de pente $-\beta = -0.19$ (haut) et $-\beta = -0.5$ (bas).

Également, comme on le voit sur la Fig. 10, pour le gain $g(k) = k^b$ sans repositionnement, l'entrée $g(k)x(k)$, et donc $y(k)$, peuvent prendre des valeurs grandes pour k grand, d'où la variance plus élevée dans l'estimation de la fonction d'autocorrélation de $y(k)$, par rapport au cas de $g(k) = (k - k_0)^b$ avec repositionnement de k_0 qui limite l'excursion de $y(k)$.

6 D'autres évolutions

Comme on le voit sur les Figs. 1 et 6, le système des Éqs. (1)–(3) ou de la Fig. 5, produit un signal $y(k)$ formé de plages où $y > 0$ séparées de plages où $y = 0$. Il est possible d'introduire, de diverses façons, plus de variabilité dans le signal généré tout en conservant les propriétés de longue dépendance. Par exemple, on peut superposer différentes traces générées par des répliques indépendantes du système des Éqs. (1)–(3) ou de la Fig. 5, excitées par des entrées $x_i(k)$ de distributions quelconques. Pour le signal $s(k) = y_1(k) - y_2(k)$, où les deux $y_i(k)$ sont générés par deux répliques indépendantes des Éqs. (1)–(3) excitées par deux entrées $x_i(k)$ gaussiennes centrées d'écart-type unité, une réalisation est représentée sur la Fig. 11, avec une estimation du spectre empirique sur la Fig. 13 qui identifie un bruit en $1/f^{0.5}$.

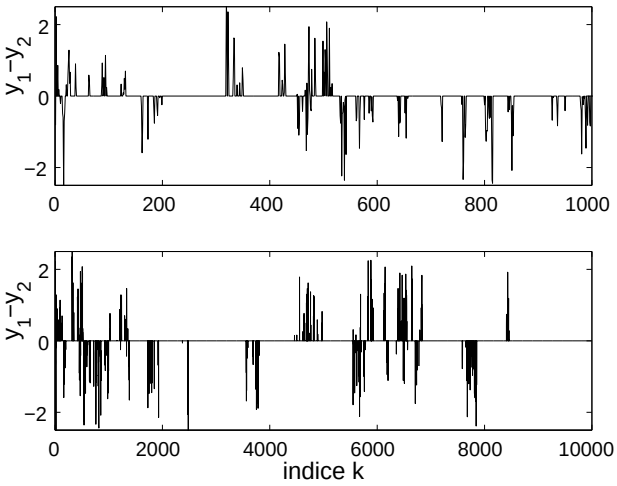

Figure 11: Une réalisation du signal $s(k) = y_1(k) - y_2(k)$ (voir Section 6). Au vu du spectre empirique de la Fig. 13, $s(k)$ constitue un bruit en $1/f^{0.5}$.

Un autre exemple utilise un signal $y(k)$ des Éqs. (1)–(3) pour déclencher un processus on-off $z(k)$ à deux états $z(k) = \pm 1$, où à chaque pas k le signal $z(k)$ change d'état si et seulement si $y(k) > 0$, comme illustré sur la Fig. 12, ce qui constitue un bruit en $1/f^{1.5}$ au vu du spectre empirique de la Fig. 13.

D'autres façons encore d'utiliser $y(k)$, pour déclencher ou moduler des processus stochastiques auxiliaires, peuvent être imaginées, afin d'accroître la flexibilité des signaux générés tout en préservant leur longue dépendance.

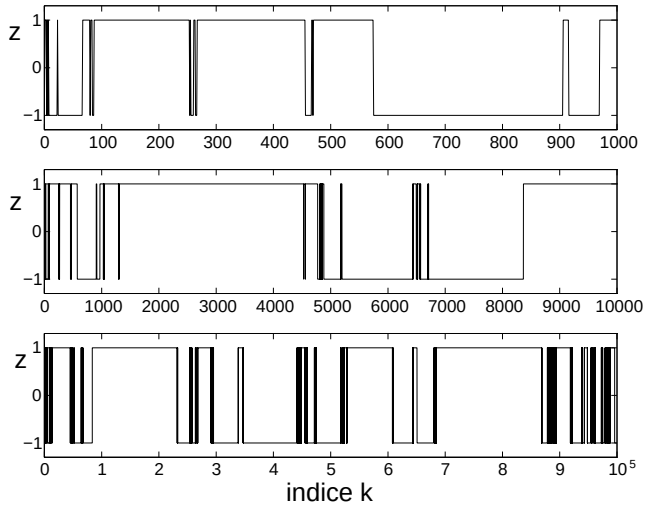

Figure 12: Une réalisation d'un processus on-off $z(k)$ déclenché par un signal $y(k)$ du type de la Fig. 1. Au vu du spectre empirique de la Fig. 13, $z(k)$ constitue un bruit en $1/f^{1.5}$.

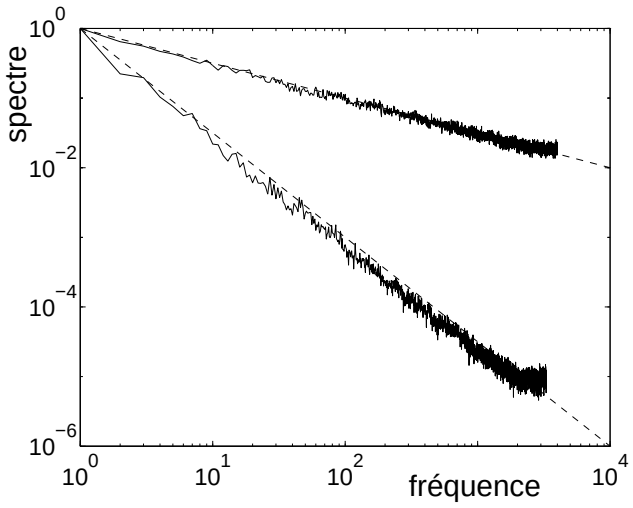

Figure 13: Spectres empiriques normalisés pour le signal $s(k) = y_1(k) - y_2(k)$ de la Fig. 11 autour de la pente $-1/2$, et pour le signal $z(k)$ de la Fig. 12 autour de la pente $-3/2$.

7 Perspectives

Nous avons montré qu'une classe de modèles issus de l'Automatique des systèmes à événements discrets, les systèmes dynamiques (max, +), sont capables de produire des signaux à longue dépendance statistique. Des éléments à la fois théoriques et numériques établissent ces propriétés. Un contrôle de l'exposant de la loi de puissance des corrélations est également rendu possible. Une caractéristique spécialement intéressante est que ces modèles prennent la forme d'une simple récurrence d'ordre un, avec une implémentation numérique directe, ce qui autorise une synthèse en ligne de signaux à longue dépendance sur des horizons temporels potentiellement illimités.

De tels modèles de signaux à longue dépendance peuvent être utilisés pour la simulation de trafic sur les réseaux de télécommunication. Les problèmes d'évaluation de performances des réseaux peuvent aussi être abordés. En soumettant des modèles de réseaux ou des protocoles de routage à du trafic à longue dépendance, il est ainsi possible d'étudier en simulation une large gamme de propriétés, comme l'évolution des débits, la distribution des temps d'attente ou d'acheminement, le remplissage et le débordement des mémoires tampons, la qualité de service. D'autres domaines peuvent également profiter de modèles et d'algorithmes de synthèse efficaces de signaux aléatoires à longue dépendance.

Références

[1] M. M. Daniel, A. S. Willsky, "The modeling and estimation of statistically self-similar processes in a multiresolution framework", *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 45, pp. 955–970, 1999.

[2] G. Wornell, *Signal Processing with Fractals*, Prentice Hall, New York, 1996.

[3] I. Csabai, "$1/f$ noise in computer network traffic", *Journal of Physics A*, vol. 27, pp. L417–L421, 1994.

[4] W. E. Leland, M. S. Taqqu, W. Willinger, D. V. Wilson, "On the self-similar nature of Ethernet traffic", *IEEE/ACM Transactions on Networking*, vol. 2, pp. 1–15, 1994.

[5] W. Willinger, M. S. Taqqu, W. E. Leland, D. V. Wilson, "Self-similarity in high-speed packet traffic: Analysis and modeling of Ethernet traffic measurements", *Statistical Science*, vol. 10, pp. 67–85, 1995.

[6] V. Paxson, S. Floyd, "Wide area traffic: The failure of Poisson modeling", *IEEE/ACM Transactions on Networking*, vol. 3, pp. 226–244, 1995.

[7] P. Abry, D. Veitch, "Wavelet analysis of long range dependent traffic", *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 44, pp. 2–15, 1999.

[8] J. Beran, R. Sherman, M. S. Taqqu, W. Willinger, "Long range dependence in variable-bit-rate video traffic", *IEEE Transactions on Communications*, vol. 43, pp. 1566–1579, 1995.

[9] B. B. Mandelbrot, "Fractional Brownian motions, fractional noises and applications", *SIAM Review*, vol. 10, pp. 422–437, 1968.

[10] O. Magré, M. Guglielmi, "Modelling and analysis of fractional Brownian motions", *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 8, pp. 377–388, 1997.

[11] C. W. J. Granger, R. Joyeux, "An introduction to long-memory time series models and fractional differencing", *Journal of Time Series Analysis*, vol. 1, pp. 15–29, 1980.

[12] A. Oustaloup, *La Dérivation Non Entière*, Hermes, Paris, 1995.

[13] R. Jennane, R. Harba, G. Jacquet, "Estimation de la qualité des méthodes de synthèse du mouvement brownien fractionnaire", *Traitement du Signal*, vol. 13, pp. 289–302, 1996.

[14] P. Flandrin, "Wavelet analysis and synthesis of fractional Brownian motion", *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 38, pp. 910–917, 1992.

[15] S. Gaubert, "Performance evaluation of (max, +) automata", *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 40, pp. 2014–2025, 1995.

[16] E. Menguy, J. L. Boimond, L. Hardouin, J. L. Ferrier, "A first step towards adaptive control for linear systems in max algebra", *Journal of Discrete Event Dynamic Systems*, vol. 10, pp. 347–367, 2000.

[17] W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Vol. I, Wiley, New York, 1971.

[18] F. Chapeau-Blondeau, "(max, +) dynamic systems for modeling traffic with long-range dependence", *Fractals*, vol. 6, pp. 305–311, 1998.

[19] F. Chapeau-Blondeau, E. Gazengel, "Dynamique (max, +) pour la génération en ligne de bruit en $1/f^{\alpha}$", in *Actes du 17ème Colloque GRETSI sur le Traitement du Signal et des Images*, Vannes, France, 13–17 sept. 1999, pp. 7–10.

[20] F. Chapeau-Blondeau, A. Monir, "A model of random signal with long-range correlations", in *Proceedings 2nd International Symposium on Physics in Signal and Image Processing*, Marseille, France, 23–24 Jan. 2001, pp. 381–384.