

MinMaxgd, une librairie de calculs dans $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$.
LISA Angers

B. Cottenceau, L. Hardouin, M. Lhommeau

Juillet 1998 - Avril 2006

Chapitre 1

Introduction

Ce document présente une librairie de calcul permettant de manipuler des séries périodiques croissantes à 2 indéterminées et à exposants dans \mathbb{N} . La structure algébrique correspondante est le dioïde $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ introduit par l'équipe (max,+) de l'INRIA Rocquencourt (voir [Cohen, 1993]) pour une construction. Ce travail a été initié en 1994 dans le cadre du DEA de Benoit Gruet [Gruet, 1995] et se poursuit jusqu'à ce jour. L'ancêtre de cette librairie s'appelle "MAX" (voir <http://maxplus.org>), il s'agit d'une boîte à outils Maple développée dans le cadre de la thèse de Stéphane Gaubert [Gaubert, 1992]. Le travail présenté ici est à la fois une relecture et une extension de ses résultats. Une librairie C++ et une interface Scilab sont disponibles à l'URL :

<http://istia.univ-angers.fr/~hardouin/outils.html>.

Notons que cette boîte à outils est compatible avec la toolbox "max,+" de l'INRIA Rocquencourt (voir <http://www.scilab.org/contrib/>).

Contact :

Laboratoire d'Ingénierie des Systèmes Automatisés,
62 Avenue Notre Dame du lac,
49000 Angers

bertrand.cottenceau@istia.univ-angers.fr

laurent.hardouin@istia.univ-angers.fr

mehdi.lhommeau@istia.univ-angers.fr

Chapitre 2

Le dioïde $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$

Ce chapitre est essentiellement inspirée de ([Cohen et al., 1989, Baccelli et al., 1992, Gaubert, 1992, Gruet, 1995, Cottencaeu, 1999, Abeka, 2005]). En quelques lignes sont rappelées les spécificités du dioïde $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$.

2.1 Dioïde $\mathbb{B}[\gamma, \delta]$

Nous considérons une représentation bi-dimensionnelle de séries de points. Le principe est de coder les trajectoires par des séries formelles en deux variables γ et δ à exposants dans \mathbb{Z} et à coefficients booléens, ce dioïde est noté $\mathbb{B}[\gamma, \delta]$.

Définition 1 (Dioïde $\mathbb{B}[\gamma, \delta]$) *On appelle $\mathbb{B}[\gamma, \delta]$ le dioïde des séries formelles commutatives à coefficients booléens en deux indéterminées γ et δ et à exposants en \mathbb{Z} . Une série formelle de $\mathbb{B}[\gamma, \delta]$ s'écrira de manière unique :*

$$s = \bigoplus_{n,t \in \mathbb{Z}} s(n,t) \gamma^n \delta^t; \quad (2.1)$$

avec $s(n,t) = e$ ou ε . $\mathbb{B}[\gamma, \delta]$ est un dioïde complet.

Définition 2 (Support d'une série) *Le support d'une série s est la partie de \mathbb{Z}^2 suivante :*

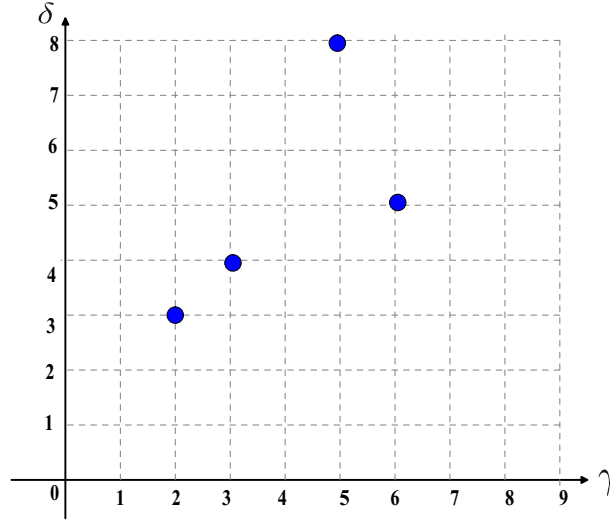
$$Supp(s) = \{(n,t) \in \mathbb{Z}^2 \mid s(n,t) \neq \varepsilon\}$$

2.1.1 Représentation graphique des éléments de $\mathbb{B}[\gamma, \delta]$

Une série de $\mathbb{B}[\gamma, \delta]$ est représentée par la collection des points (n, t) du plan \mathbb{Z}^2 appartenant au support de cette série. Pratiquement la série $s = \gamma^2 \delta^3 \oplus \gamma^3 \delta^4 \oplus \gamma^5 \delta^8 \oplus \gamma^6 \delta^5 \in \mathbb{B}[\gamma, \delta]$ sera représentée par les points de coordonnées $(2, 3)$, $(3, 4)$, $(5, 8)$ et $(6, 5)$ de \mathbb{Z}^2 . (voir figure 2.1).

2.2 Dioïde $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$

Afin de prendre en compte la monotonie des trajectoires, seules les séries qui sont invariantes par rapport à la multiplication par γ^* (monotonie des dateurs) et la multiplication par $(\delta^{-1})^*$ (monotonie des compteurs). Dans cet objectif, seul ce sous-ensemble de $\mathbb{B}[\gamma, \delta]$, noté $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$, est considéré.

FIG. 2.1 – Représentation graphique de la série s **Théorème 1**

1. Nous appelons $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ le dioïde $\mathbb{B}[\gamma, \delta]$ quotienté par la congruence

$$\{X_1(\gamma, \delta)\mathcal{R}_{(\gamma, \delta)}X_2(\gamma, \delta)\} \iff \{\gamma^*(\delta^{-1})^*X_1(\gamma, \delta) = \gamma^*(\delta^{-1})^*X_2(\gamma, \delta)\}$$

2. Chaque classe du dioïde quotient $\mathbb{B}[\gamma, \delta]/\mathcal{R}_{(\gamma, \delta)}$ contient un plus grand élément qui appartient à $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$.

Propriété 1 Le dioïde $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ est un dioïde complet distributif qui admet un élément neutre $\varepsilon = \varepsilon(\gamma, \delta)$ (la série nulle de $\mathbb{B}[\gamma, \delta]$) pour la loi \oplus et un élément neutre $e = (\gamma \oplus \delta^{-1})^*$ pour la loi \otimes .

Exemple 1 Soient s_1 et s_2 , deux éléments de $\mathbb{B}[\gamma, \delta]$ définis ci-dessous

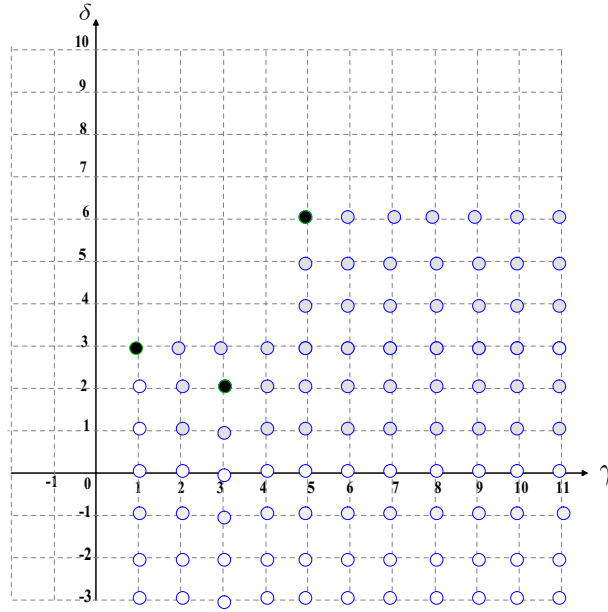
$$s_1 = \gamma^2\delta^3 \oplus \gamma^3\delta^2 \oplus \gamma^5\delta^6,$$

$$s_2 = \gamma^2\delta^3 \oplus \gamma^5\delta^6.$$

Le calcul de $(\gamma^*(\delta^{-1})^*)s_1$ est détaillé ci-dessous

$$\begin{aligned} (\gamma^*(\delta^{-1})^*)s_1 &= (e \oplus \gamma^1 \oplus \gamma^2 \oplus \gamma^3 \oplus \dots)(e \oplus \delta^{-1} \oplus \delta^{-2} \oplus \delta^{-3} \oplus \dots)(\gamma^2\delta^3 \oplus \gamma^3\delta^2 \oplus \gamma^5\delta^6) \\ &= (e \oplus \gamma^1\delta^{-1} \oplus \gamma^1\delta^{-2} \oplus \gamma^1\delta^{-3} \oplus \dots \oplus \gamma^2\delta^{-1} \oplus \gamma^2\delta^{-2} \oplus \gamma^2\delta^{-3} \oplus \dots)(\gamma^2\delta^3 \oplus \gamma^3\delta^2 \oplus \gamma^5\delta^6) \\ &= (\gamma^*(\delta^{-1})^*)(\gamma^2\delta^3 \oplus \gamma^5\delta^6) \\ &= (\gamma^*(\delta^{-1})^*)s_2. \end{aligned}$$

Clairement, on a $(\gamma^*(\delta^{-1})^*)s_1 = (\gamma^*(\delta^{-1})^*)s_2 = (\gamma^*(\delta^{-1})^*)(\gamma^2\delta^3 \oplus \gamma^5\delta^6)$, donc les séries s_1 et s_2 appartiennent à la même classe d'équivalence dans $\mathbb{B}[\gamma, \delta]/\mathcal{R}_{(\gamma, \delta)}$. De plus $(\gamma^*(\delta^{-1})^*)(\gamma^2\delta^3 \oplus \gamma^5\delta^6)$ est le plus grand élément de cette classe dans $\mathbb{B}[\gamma, \delta]$.

FIG. 2.2 – Représentation graphique de la série $\bullet \equiv s_1 \circ \equiv (\gamma^*(\delta^{-1})^*)s_1$

2.2.1 Représentation graphique des éléments de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$

Nous nous appuyons sur la représentation des éléments de $\mathbb{B}[\gamma, \delta]$ pour définir une représentation graphique des éléments de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$. Graphiquement, pour le monôme $\gamma^n \delta^t$, on ne considère plus le point de coordonnées (n, t) mais le "cône Sud-Est" de sommet (n, t) . (voir figure 2.2)

Représentant maximal Les dioïdes $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ et $\mathbb{B}[\gamma, \delta]/\mathcal{R}_{(\gamma^*(\delta^{-1})^*)}$ sont isomorphes. En d'autre terme, tout élément $a \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ vérifié l'égalité $a = (\gamma^*(\delta^{-1})^*)a$ et $(\gamma^*(\delta^{-1})^*)a$ est le représentant maximal de la classe de a dans $\mathbb{B}[\gamma, \delta]$. Graphiquement dans \mathbb{Z}^2 , le représentant maximal est représenté par tous les points de \mathbb{Z}^2 situés dans le cône sud-est qui s'étend sur la plus grande surface, en couvrant les représentations de chacun des autres éléments de sa classe.

Exemple 2 (Représentant maximal) Soit $s = \gamma^1 \delta^3 \oplus \gamma^2 \delta^2 \oplus \gamma^2 \delta^4 \oplus \gamma^4 \delta^3 \oplus \gamma^4 \delta^6 \oplus \gamma^5 \delta^8 \oplus \gamma^6 \delta^7 \oplus \gamma^7 \delta^8 \oplus \gamma^8 \delta^9$.

On vérifie facilement que cette série est égale à la série (sont dans la même classe d'équivalence) :

$$\gamma^1 \delta^3 \oplus \gamma^2 \delta^4 \oplus \gamma^4 \delta^6 \oplus \gamma^5 \delta^8 \oplus \gamma^8 \delta^9.$$

Le représentant maximal de s est donné par

$$(\gamma^*(\delta^{-1})^*)(\gamma^1 \delta^3 \oplus \gamma^2 \delta^4 \oplus \gamma^4 \delta^6 \oplus \gamma^5 \delta^8 \oplus \gamma^8 \delta^9).$$

Le représentant maximal de s est représenté par La figure 2.3.

Représentant minimal De même que tout élément de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ admet un représentant maximal dans $\mathbb{B}[\gamma, \delta]$, il est montré, notamment dans [Baccelli et al., 1992], que certains éléments de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ admettent également un représentant minimal dans $\mathbb{B}[\gamma, \delta]$. C'est le cas notamment des polynômes. Graphiquement, on obtient ce représentant minimal en ne codant que les sommets du représentant de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$.

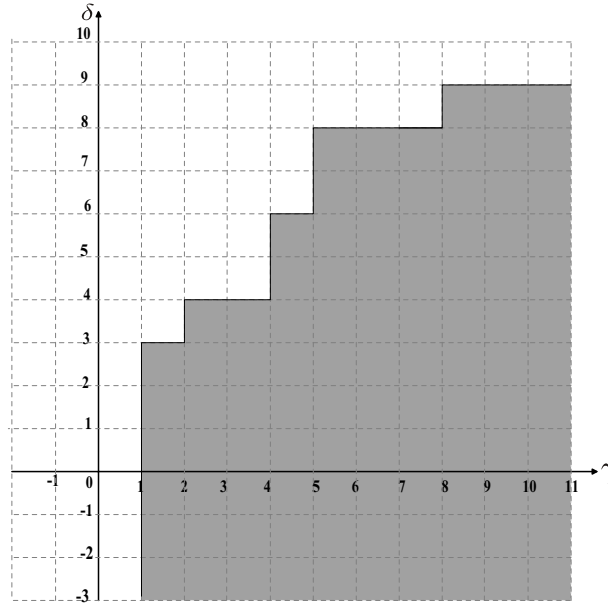


FIG. 2.3 – Le représentant maximal de la série $s = \gamma^1\delta^3 \oplus \gamma^2\delta^2 \oplus \gamma^2\delta^4 \oplus \gamma^4\delta^3 \oplus \gamma^4\delta^6 \oplus \gamma^5\delta^8 \oplus \gamma^6\delta^7 \oplus \gamma^7\delta^8 \oplus \gamma^8\delta^9$.

Exemple 3 (Représentant minimal) Soit $s = \gamma^1\delta^4 \oplus \gamma^2\delta^2 \oplus \gamma^5\delta^6 \oplus \gamma^6\delta^3$ un élément de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$, l'élément $\gamma * (\delta^{-1}) * (\gamma^1\delta^4 \oplus \gamma^5\delta^6)$ est le représentant maximal (graphiquement correspond à toute la surface de l'union de deux cônes de sommet $(1, 4)$ et $(5, 6)$) et $(\gamma^1\delta^4 \oplus \gamma^5\delta^6)$ est son représentant minimal (seulement les sommets de deux cônes).

Le représentant minimal de s est représenté par la figure 2.4.

2.3 Monômes de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$

Comme dit précédemment un monôme $\gamma^n\delta^t$ code le "cône Sud-Est" de sommet (n, t) . (voir figure 2.2)

Remarque 1 Les notations suivantes seront utilisées pour le plus petit et le plus grand élément de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$: $\varepsilon = \gamma^{+\infty}\delta^{-\infty}$ et $\top = \gamma^{-\infty}\delta^{+\infty}$.

A partir des résultats précédents, on peut interpréter les opérations d'addition de multiplication et de borne inférieure dans $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$.

1. la somme de deux monômes $\gamma^n\delta^t$ et $\gamma^{n'}\delta^{t'}$ est représentée par l'union des "cônes Sud-Est" de sommets respectifs (n, t) et (n', t') .
2. le produit de deux monômes $\gamma^n\delta^t$ et $\gamma^{n'}\delta^{t'}$ est représenté par le cône de sommet $(n + n', t + t')$ (ce qui correspond au cône dont le sommet est la somme vectorielle des sommets (n, t) et (n', t')).
3. l'inf de deux monômes $\gamma^n\delta^t$ et $\gamma^{n'}\delta^{t'}$ est représenté par l'intersection des "cônes Sud-Est" de sommets respectifs (n, t) et (n', t') .

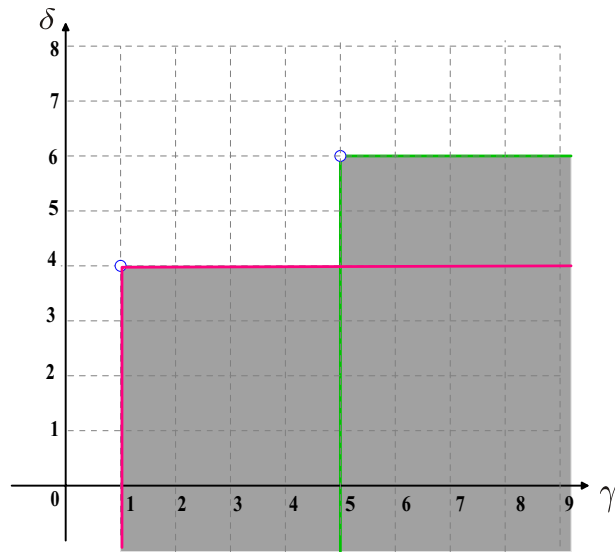


FIG. 2.4 – Le représentant maximal (grisé) et minimal (les sommets) de $(\gamma^1 \delta^4 \oplus \gamma^5 \delta^6)$

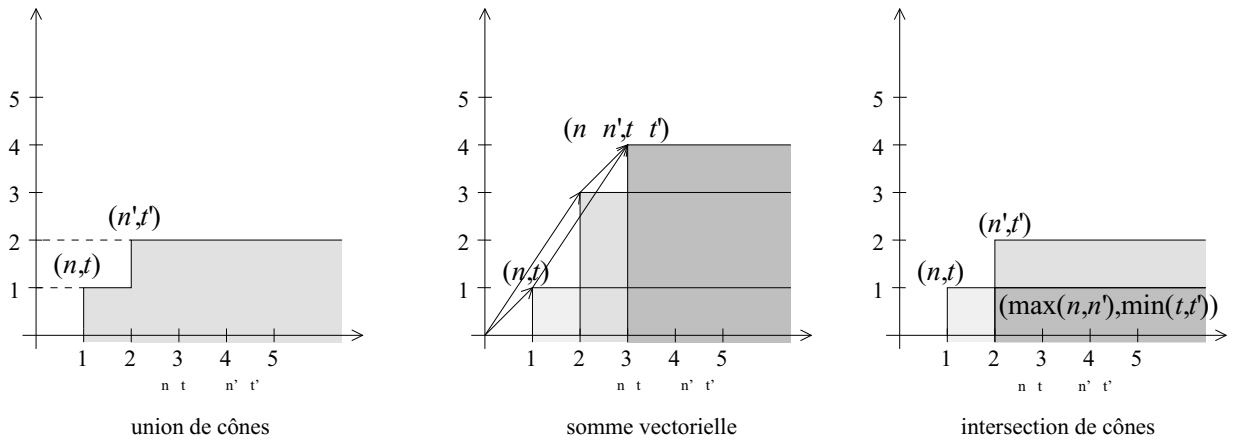


FIG. 2.5 – Représentation graphique des opérations sur $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$

Les règles de simplification suivantes dans $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$ sont immédiates :

$$\begin{aligned} \gamma^n \delta^t \oplus \gamma^{n'} \delta^{t'} &= \gamma^{\min(n, n')} \delta^t \\ \gamma^n \delta^t \oplus \gamma^n \delta^{t'} &= \gamma^n \delta^{\max(t, t')} \\ \gamma^n \delta^t \wedge \gamma^{n'} \delta^{t'} &= \gamma^{\max(n, n')} \delta^{\min(t, t')}. \end{aligned}$$

2.4 Polynômes de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$

Définition 3 *Un polynôme de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$ est une somme de m monômes.*

$$p = \bigoplus_{i=1}^m \gamma^{n_i} \delta^{t_i}$$

Un polynôme admet une représentation canonique.

$$p = \gamma^{n_1} \delta^{t_1} \oplus \gamma^{n_2} \delta^{t_2} \oplus \dots \oplus \gamma^{n_m} \delta^{t_m}$$

avec $n_1 < n_2 < \dots < n_m$ et $t_1 < t_2 < \dots < t_m$.

2.4.1 Somme de polynômes canoniques

$$p \oplus p' = \bigoplus_{i=1}^m \gamma^{n_i} \delta^{t_i} \oplus \bigoplus_{j=1}^{m'} \gamma^{n'_j} \delta^{t'_j}$$

Le résultat est fourni sous forme canonique. Il s'agit d'un parcours des 2 polynômes et insertion des monômes, après application des règles de simplification, dans le polynôme résultat. Complexité $\mathcal{O}(m + m')$.

2.4.2 Produit de polynômes canoniques

$$p \otimes p' = \bigoplus_{i=1}^m \bigoplus_{j=1}^{m'} \gamma^{n_i+n'_j} \delta^{t_i+t'_j}$$

Le résultat est fourni sous forme canonique. Il s'agit de (mm') produit de monômes. Il faut ensuite fusionner m polynômes de m' monômes (somme de m polynômes de m' monômes), cela se fait en $\mathcal{O}(m'm \log(m))$. Il est donc judicieux d'éventuellement commuter les polynômes p et p' .

2.5 Séries périodiques de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$

Définition 4 (Série périodique) *Une série périodique de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$ peut toujours s'écrire sous la forme*

$$s = p \oplus qr^*$$

où p et q sont des polynômes et r un monôme.

On utilisera par la suite les notations suivantes

$$p = \bigoplus_{i=1}^m \gamma^{n_i} \delta^{t_i}, q = \bigoplus_{j=1}^l \gamma^{N_j} \delta^{T_j} \text{ et } r = \gamma^\nu \delta^\tau$$

Définition 5 (Pente asymptotique) *On appelle pente asymptotique d'une série s le ratio*

$$\sigma_\infty(s) = \nu/\tau.$$

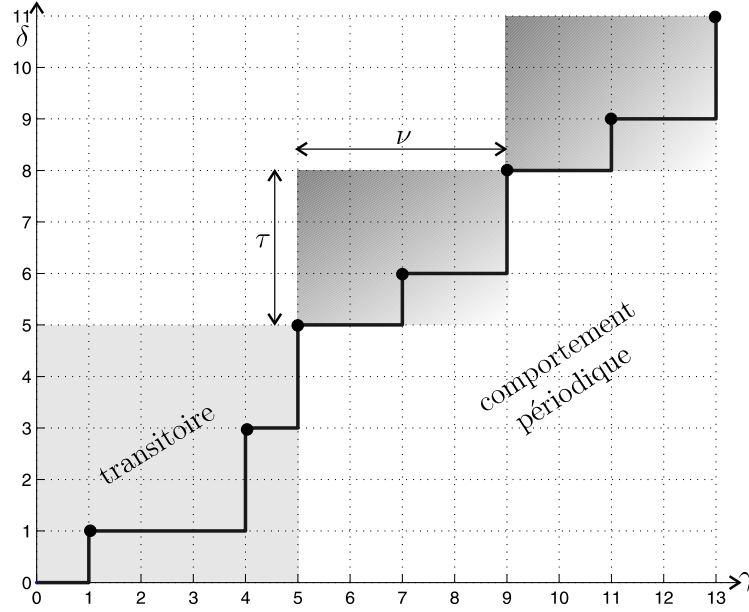


FIG. 2.6 – représentation de la série $s = p \oplus qr^* = e \oplus \gamma\delta \oplus \gamma^4\delta^3 \oplus (\gamma^5\delta^5 \oplus \gamma^7\delta^6)(\gamma^4\delta^3)^*$.

Définition 6 (Représentation Propre) Une série s est dite sous forme propre si

$$(n_m, t_m) < (N_1, T_1) \text{ et } (N_l, T_l) - (N_1, T_1) < (\nu, \tau).$$

Définition 7 Une représentation propre $s = p \oplus qr^*$ est dite plus simple qu'une représentation propre $s = p' \oplus q'r'^*$ si

$$(n_m, t_m) \leq (n'_m, t'_m) \text{ et } (\nu, \tau) \leq (\nu', \tau').$$

Théorème 2 Une série périodique s admet une plus simple représentation. Cette plus simple représentation est appelée forme canonique de s .

2.5.1 Somme de séries périodiques

$$s \oplus s' = (p \oplus qr^*) \oplus (p' \oplus q'r'^*) =$$

Les techniques employées pour exprimer le résultat d'opérations sur les séries périodiques reposent le plus souvent sur une bonne compréhension de la manipulation des éléments simples. Aussi, par la suite, nous rappellerons parfois au préalable comment traiter le cas des séries simples.

Lemme 1 (Domination) Ce lemme est un raffinement du lemme 4.1.4 de [Gaubert, 1992].

Soit $s = \gamma^n \delta^t (\gamma^\nu \delta^\tau)^*$ et $s' = \gamma^{n'} \delta^{t'} (\gamma^{\nu'} \delta^{\tau'})^*$ deux éléments simples de pentes asymptotiques différentes. Si $\sigma_\infty(s) = \nu/\tau < \sigma_\infty(s') = \nu'/\tau'$ alors il existe un entier $K \in \mathbb{N}$ tel que

$$\gamma^{n'} \delta^{t'} \gamma^{K\nu'} \delta^{K\tau'} (\gamma^{\nu'} \delta^{\tau'})^* \leq \gamma^n \delta^t (\gamma^\nu \delta^\tau)^*. \quad (2.2)$$

Ce lemme est illustré par la figure 2.7. Le problème consiste à trouver à partir de quelle valeur K la série s est définitivement "au dessus" de s' . Sur la figure 2.7, le plus petit K vérifiant le lemme 1 est $K = 3$.

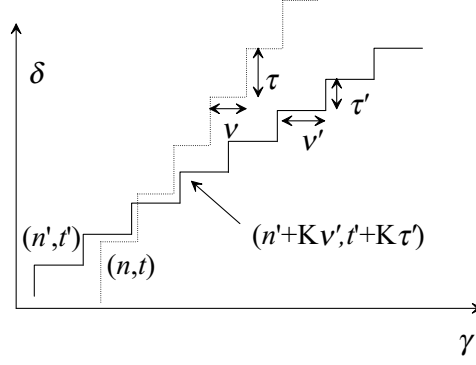


FIG. 2.7 – Domination ultime de séries simples de pentes différentes

Preuve 1 On peut écrire

$$\gamma^n \delta^t (\gamma^\nu \delta^\tau)^* = \bigoplus_{i \geq 0} \gamma^{n+i\nu} \delta^{t+i\tau}$$

et

$$\gamma^{n'} \delta^{t'} \gamma^{K\nu'} \delta^{K\tau'} (\gamma^{\nu'} \delta^{\tau'})^* = \bigoplus_{j \geq K} \gamma^{n'+j\nu'} \delta^{t'+j\tau'}$$

Par conséquent, il existe un entier K positif tel que l'inégalité (2.2) est vérifiée si et seulement si

$$x \in \mathbb{N}, \forall x \geq K, \exists y \in \mathbb{N} \text{ tel que } \begin{cases} n' + x\nu' \geq n + y\nu \\ t' + x\tau' \leq t + y\tau \end{cases}$$

ou encore

$$\forall x \geq K, \exists y \in \mathbb{N} \text{ tel que } \frac{n' + x\nu' - n}{\nu} \geq y \geq \frac{t' + x\tau' - t}{\tau}. \quad (2.3)$$

Or il existe un entier $y \in \mathbb{Z}$ vérifiant ces inégalités si

$$\left(\frac{n' + x\nu' - n}{\nu} \right) - \left(\frac{t' + x\tau' - t}{\tau} \right) \geq 1$$

ce qui est vérifié pour x assez grand, par exemple pour x vérifiant

$$x \geq \left\lceil \frac{\nu(t' - t) + \tau(n - n') + \nu\tau}{\tau\nu' - \nu\tau'} \right\rceil$$

où $\lceil a \rceil \in \mathbb{Z}$ représente le plus petit entier supérieur à $a \in \mathbb{Q}$. De plus, y doit également être positif ce qui d'après (2.3) est vérifié si

$$n' + x\nu' \geq n,$$

et donc en particulier si

$$x \geq \left\lceil \frac{n - n'}{\nu'} \right\rceil.$$

Enfin, puisque K doit être positif, il suffit de prendre

$$K = \max \left(\left\lceil \frac{\nu(t' - t) + \tau(n - n') + \nu\tau}{\tau\nu' - \nu\tau'} \right\rceil, \left\lceil \frac{n - n'}{\nu'} \right\rceil, 0 \right) \quad (2.4)$$

pour que la domination exprimée par le lemme 1 soit vérifiée.

Remarque 2 Il faut garder à l'esprit que K donné par l'expression (2.4) n'est pas nécessairement le plus petit entier positif satisfaisant la domination (2.2).

Théorème 3 La somme de deux éléments simples s et s' est une série périodique de pente asymptotique

$$\sigma_\infty(s \oplus s') = \min(\sigma_\infty(s), \sigma_\infty(s')).$$

Preuve 2 On doit considérer deux cas.

- si $\sigma_\infty(s) = \nu/\tau < \sigma_\infty(s') = \nu'/\tau'$ On peut dans ce cas réécrire la somme d'éléments simples

$$\begin{aligned} s \oplus s' &= \gamma^n \delta^t (\gamma^\nu \delta^\tau)^* \oplus \gamma^{n'} \delta^{t'} (\gamma^{\nu'} \delta^{\tau'})^* \\ &= \gamma^n \delta^t (\gamma^\nu \delta^\tau)^* \oplus \left[\gamma^{n'} \delta^{t'} \oplus \gamma^{n'+\nu'} \delta^{t'+\tau'} \oplus \dots \right. \\ &\quad \left. \dots \oplus \gamma^{n'+(K-1)\nu'} \delta^{t'+(K-1)\tau'} \right] \oplus \gamma^{n'} \delta^{t'} \gamma^{K\nu'} \delta^{K\tau'} (\gamma^{\nu'} \delta^{\tau'})^* \end{aligned}$$

où K est donné par (2.4). En accord avec le lemme 1, le dernier terme est dominé par le reste de l'expression, il peut donc être supprimé. La somme d'éléments simples peut s'écrire dans ce cas

$$s \oplus s' = \bigoplus_{j=0}^{K-1} \gamma^{n'+j\nu'} \delta^{t'+j\tau'} \oplus \gamma^n \delta^t (\gamma^\nu \delta^\tau)^* = p'' \oplus q'' r''^*$$

qui est donc une série périodique de pente $\sigma_\infty(s \oplus s') = \min(\sigma_\infty(s), \sigma_\infty(s'))$. La complexité est liée au développement du transitoire et est linéaire en K .

- si $\sigma_\infty(s) = \nu/\tau = \sigma_\infty(s') = \nu'/\tau'$ alors il existe k et k' tels que

$$\text{ppcm}(\nu, \nu') = k\nu = k'\nu' = \nu'' \text{ et } \text{ppcm}(\tau, \tau') = k\tau = k'\tau' = \tau''.$$

On peut alors écrire $r^* = (e \oplus r \oplus \dots \oplus r^{k-1}) (r^k)^*$ soit

$$\begin{aligned} r^* &= (\gamma^\nu \delta^\tau)^* = \left(e \oplus \gamma^\nu \delta^\tau \oplus \dots \oplus \gamma^{(k-1)\nu} \delta^{(k-1)\tau} \right) (\gamma^{\nu''} \delta^{\tau''})^* \\ (r')^* &= (\gamma^{\nu'} \delta^{\tau'})^* = \left(e \oplus \gamma^{\nu'} \delta^{\tau'} \oplus \dots \oplus \gamma^{(k'-1)\nu'} \delta^{(k'-1)\tau'} \right) (\gamma^{\nu''} \delta^{\tau''})^*. \end{aligned}$$

La somme de deux éléments simples de même pente asymptotique peut donc s'écrire

$$\begin{aligned} s \oplus s' &= \gamma^n \delta^t (\gamma^\nu \delta^\tau)^* \oplus \gamma^{n'} \delta^{t'} (\gamma^{\nu'} \delta^{\tau'})^* \\ &= \left[\gamma^n \delta^t (e \oplus \gamma^\nu \delta^\tau \oplus \dots \oplus \gamma^{(k-1)\nu} \delta^{(k-1)\tau}) \right. \\ &\quad \left. \oplus \gamma^{n'} \delta^{t'} (e \oplus \gamma^{\nu'} \delta^{\tau'} \oplus \dots \oplus \gamma^{(k'-1)\nu'} \delta^{(k'-1)\tau'}) \right] (\gamma^{\nu''} \delta^{\tau''})^* = q'' r''^* \end{aligned}$$

ce qui est également une série périodique de pente $\sigma_\infty(s \oplus s') = \min(\sigma_\infty(s), \sigma_\infty(s')) = \frac{\nu}{\tau} = \frac{\nu'}{\tau'}$. La complexité repose sur la somme des 2 polynômes de k et k' éléments ($\mathcal{O}(k + k')$).

Remarque 3 Les résultats donnés par les preuves précédentes apparaissent sous forme de séries périodiques, mais il faut remarquer que le résultat n'est pas nécessairement sous forme canonique. Il convient donc ensuite d'appliquer l'algorithme de représentation minimale pour obtenir le résultat sous forme canonique. La même remarque s'applique en général à tous les autres algorithmes.

Théorème 4 La somme de séries périodiques s et s' est une série périodique de pente

$$\sigma_\infty(s \oplus s') = \min(\sigma_\infty(s), \sigma_\infty(s')).$$

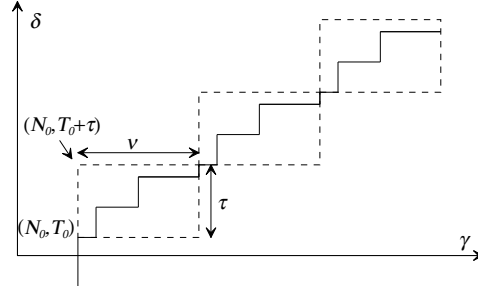


FIG. 2.8 – Encadrement de qr^* par deux éléments simples : $\gamma^{N_1} \delta^{T_1} (\gamma^\nu \delta^\tau)^* \preceq qr^* \preceq \gamma^{N_1} \delta^{T_1 + \tau} (\gamma^\nu \delta^\tau)^*$

Preuve 3 • si $\sigma_\infty(s) = \sigma_\infty(s')$ alors en posant

$$\nu'' = \text{ppcm}(\nu, \nu'), \quad \tau'' = \text{ppcm}(\tau, \tau'), \quad k = \text{ppcm}(\nu, \nu')/\nu, \quad \text{et } k' = \text{ppcm}(\nu, \nu')/\nu'$$

on peut écrire la somme

$$\begin{aligned} s \oplus s' &= p \oplus qr^* \oplus p' \oplus q'r'^* \\ &= [p \oplus p'] \oplus \left[q(e \oplus \dots \oplus r^{(k-1)}) \oplus q'(e \oplus \dots \oplus r'^{(k'-1)}) \right] (\gamma^{\nu''} \delta^{\tau''})^* \\ &= p'' \oplus q''(r'')^* \end{aligned}$$

ce qui est une série périodique de pente $\sigma_\infty(s \oplus s') = \min(\sigma_\infty(s), \sigma_\infty(s')) = \frac{\nu''}{\tau''} = \frac{\nu}{\tau} = \frac{\nu'}{\tau'}$.

La complexité repose sur la somme et le produit de polynômes. Notons que $q(e \oplus \dots \oplus r^{(k-1)})$ a une complexité $\mathcal{O}(kl \log(l))$, où $k = \text{ppcm}(\nu, \nu')/\nu$. De même $q'(e \oplus \dots \oplus r'^{(k'-1)})$ a une complexité $\mathcal{O}(k'l' \log(l'))$, où $k' = \text{ppcm}(\nu, \nu')/\nu'$.

• si $\sigma_\infty(s) < \sigma_\infty(s')$ et si s et s' sont sous forme canonique, on peut d'une part minorer qr^* par un élément simple mr^* et majorer $q'r'^*$ par un élément simple $m'r'^*$. On a en effet

$$qr^* = \left(\bigoplus_{j=1}^l \gamma^{N_j} \delta^{T_j} \right) (\gamma^\nu \delta^\tau)^* \succeq \gamma^{N_1} \delta^{T_1} (\gamma^\nu \delta^\tau)^*$$

mais également

$$q'r'^* = \left(\bigoplus_{j=1}^{\nu'} \gamma^{N'_j} \delta^{T'_j} \right) (\gamma^{\nu'} \delta^{\tau'})^* \preceq \gamma^{N'_1} \delta^{T'_1 + \tau'} (\gamma^{\nu'} \delta^{\tau'})^*$$

(la figure 2.8 donne une interprétation graphique de ces relations).

Le lemme 1 montre qu'il existe K tel que

$$\gamma^{N'_1} \delta^{T'_1 + \tau'} \gamma^{K\nu'} \delta^{K\tau'} (\gamma^{\nu'} \delta^{\tau'})^* \preceq \gamma^{N_1} \delta^{T_1} (\gamma^\nu \delta^\tau)^*.$$

On a donc par isotonie du produit

$$\gamma^{K\nu'} \delta^{K\tau'} q' (\gamma^{\nu'} \delta^{\tau'})^* \preceq \gamma^{N'_1} \delta^{T'_1 + \tau'} \gamma^{K\nu'} \delta^{K\tau'} (\gamma^{\nu'} \delta^{\tau'})^* \preceq \gamma^{N_1} \delta^{T_1} (\gamma^\nu \delta^\tau)^* \preceq q (\gamma^\nu \delta^\tau)^*.$$

La somme de deux séries périodiques de pentes différentes s'écrit donc

$$\begin{aligned} s \oplus s' &= \left[p \oplus p' \oplus q' \left[\bigoplus_{i=0}^{K-1} \gamma^{i\nu'} \delta^{i\tau'} \right] \right] \oplus qr^* \\ &= p'' \oplus q'' r''^* \end{aligned}$$

avec

$$K = \max \left(\left\lceil \frac{\nu(T'_1 + \tau' - T_1) + \tau(N_1 - N'_1) + \nu\tau}{\tau\nu' - \nu\tau'} \right\rceil, \left\lceil \frac{N_1 - N'_1}{\nu'} \right\rceil, 0 \right).$$

Cette somme repose sur la somme et le produit de polynômes. Notons que le produit $q' \left[\bigoplus_{i=0}^{K-1} \gamma^{i\nu'} \delta^{i\tau'} \right]$ a une complexité $\mathcal{O}(Kl' \log(l'))$.

2.6 Produit de séries périodiques

Théorème 5 Soit $s = \gamma^n \delta^t (\gamma^\nu \delta^\tau)^*$ et $s' = \gamma^{n'} \delta^{t'} (\gamma^{\nu'} \delta^{\tau'})^*$ deux éléments simples. Le produit $s \otimes s'$ est une série périodique de pente asymptotique

$$\sigma_\infty(s \otimes s') = \min(\sigma_\infty(s), \sigma_\infty(s')).$$

Preuve 4 • si $\sigma_\infty(s) < \sigma_\infty(s')$ alors selon le lemme 1, il existe K tel que

$$r'^K r'^{*} \preceq r^*. \quad (2.5)$$

Soit, par isotonie du produit, $r'^K r'^{*} r^* \preceq r^* r^* = r^*$. On peut écrire $r^* r'^{*} = r^* (e \oplus r' \oplus \dots \oplus r'^{(K-1)} \oplus r'^K r'^{*})$ qui, d'après (2.5), se simplifie en

$$r^* r'^{*} = r^* (e \oplus r' \oplus \dots \oplus r'^{(K-1)}).$$

Le produit d'éléments simples de pente différente s'exprime simplement

$$\gamma^n \delta^t (\gamma^\nu \delta^\tau)^* \otimes \gamma^{n'} \delta^{t'} (\gamma^{\nu'} \delta^{\tau'})^* = \gamma^{n+n'} \delta^{t+t'} \left(e \oplus \gamma^{\nu'} \delta^{\tau'} \oplus \dots \oplus \gamma^{(K-1)\nu'} \delta^{(K-1)\tau'} \right) (\gamma^\nu \delta^\tau)^*$$

avec

$$K = \max \left(\left\lceil \frac{\nu\tau}{\tau\nu' - \nu\tau'} \right\rceil, 0 \right).$$

Le complexité du développement du polynôme est linéaire ($\mathcal{O}(K)$).

• si $\sigma_\infty(s) = \sigma_\infty(s')$ Alors, en posant $\nu'' = \text{ppcm}(\nu, \nu') = k\nu = k'\nu'$ et $\tau'' = \text{ppcm}(\tau, \tau') = k\tau = k'\tau'$, on a

$$\begin{aligned} r^* &= [e \oplus \dots \oplus r^{(k-1)}] (r'')^* \\ r'^* &= [e \oplus \dots \oplus r'^{(k'-1)}] (r'')^* \end{aligned}$$

Le produit d'éléments simples de même pente s'exprime donc

$$\begin{aligned} s \otimes s' &= \gamma^{n+n'} \delta^{t+t'} [e \oplus \dots \oplus r^{(k-1)}] \otimes [e \oplus \dots \oplus r'^{(k'-1)}] (r'')^* \\ &= q'' r''^*. \end{aligned}$$

La complexité repose donc sur le produit de 2 polynômes, soit $\mathcal{O}(k'k \log(k))$, avec $k = \text{ppcm}(\nu, \nu')/\nu$ et $k' = \text{ppcm}(\nu, \nu')/\nu'$ qui dépendent de la taille du motif.

Théorème 6 *Le produit de séries périodiques est une série périodique de pente asymptotique*

$$\sigma_{\infty}(s \otimes s') = \min(\sigma_{\infty}(s), \sigma_{\infty}(s'))$$

Preuve 5 *Le produit de séries périodiques s'écrit*

$$\begin{aligned} s \otimes s' &= [p \oplus qr^*] \otimes [p' \oplus q'r'^*] \\ &= pp' \oplus pq'r'^* \oplus p'qr^* \oplus qq'r'^*r'^*. \end{aligned}$$

*Le calcul de cette dernière expression se déduit directement du produit d'éléments simples (pour le produit $r^*r'^*$) et de la somme de séries périodiques.*

2.6.1 Etoile de polynômes

$$p = \bigoplus_{i=1}^m \gamma^{n_i} \delta^{t_i}$$

$$s = p^* = \left(\bigoplus_{i=1}^m \gamma^{n_i} \delta^{t_i} \right)^*$$

Théorème 7 *L'étoile d'un polynôme p est une série périodique s de pente asymptotique*

$$\sigma_{\infty}(s) = \min(n_i/t_i) \text{ avec } i \in [1, m]$$

Preuve 6 *La somme de monômes est commutative, par conséquent*

$$s = \left(\bigoplus_{i=1}^m \gamma^{n_i} \delta^{t_i} \right)^* = \bigotimes_{i=1}^m (\gamma^{n_i} \delta^{t_i})^*$$

L'étoile de polynôme se ramène donc à la somme de m éléments simples. La pente asymptotique est donc $\sigma_{\infty}(s) = \min(n_i/t_i)$ avec $i \in [1, m]$. Cela repose donc sur l'application des algorithmes du théorème 2.

2.6.2 Etoile de séries périodiques

Soit pour la série périodique :

$$s = p \oplus qr^*$$

l'étoile est donnée par :

$$s^* = (p \oplus qr^*)^* = p^*(e \oplus (q \oplus r)^*).$$

Le calcul de l'étoile d'une série se décompose donc comme l'étoile de polynômes (p^* et $(q \oplus r)^*$) et la somme de ces séries.

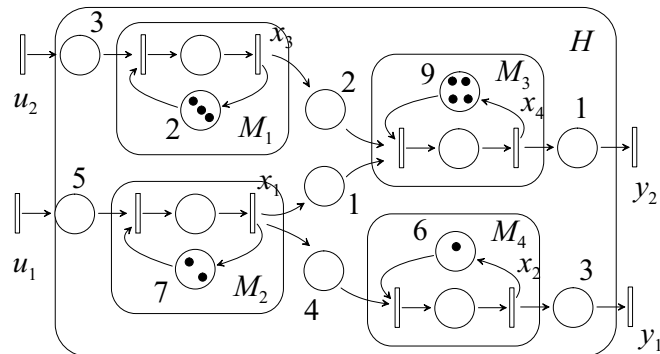


FIG. 2.9 – Exemple de TEG, 2 entrées 2 sorties.

2.7 La Librairie MinMaxgd

MinMaxgd se présente comme un ensemble de classes écrites en $C++$, ces classes permettent de manipuler des séries rationnelles dans le dioïde $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$. Nous allons découvrir l'utilisation de cette librairie à travers quelques exemples de calculs.

On peut par exemple reprendre les calculs de la figure 2.9. Voici le programme principal en $C++$, permettant d'effectuer les calculs.

déclarations des variables pour les matrices A, B, C du système.

```
void main(void) {
    gd m;
    smatrix A(4,4), B(4,2), C(2,4);
```

les variables étant déclarées, on peut maintenant leur affecter des éléments, par défaut l'initialisation des éléments se fait avec epsilon.

```
A(0,0).init(epsilon,m.init(2,7),e);
A(0,1).init(epsilon,epsilon,e);
A(0,2).init(epsilon,epsilon,e);
A(0,3).init(epsilon,epsilon,e);

A(1,0).init(epsilon,m.init(0,4),e);
A(1,1).init(epsilon,m.init(1,6),e);
A(1,2).init(epsilon,epsilon,e);
A(1,3).init(epsilon,epsilon,e);

A(2,0).init(epsilon,epsilon,e);
A(2,1).init(epsilon,epsilon,e);
A(2,2).init(epsilon,m.init(3,2),e);
A(2,3).init(epsilon,epsilon,e);

A(3,0).init(epsilon,m.init(0,1),e);
A(3,1).init(epsilon,epsilon,e);
```

```
A(3,2).init(epsilon,m.init(0,2),e);
A(3,3).init(epsilon,m.init(4,9),e);
```

On obtient alors la matrice $A = \begin{pmatrix} \gamma^2\delta^7 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \delta^4 & \gamma\delta^6 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \gamma^3\delta^2 & \varepsilon \\ \delta & \varepsilon & \delta^2 & \gamma^4\delta^9 \end{pmatrix}$

pour la matrice B

```
B(0,0).init(epsilon,m.init(0,5),e);
B(0,1).init(epsilon,epsilon,e);
```

```
B(1,0).init(epsilon,epsilon,e);
B(1,1).init(epsilon,epsilon,e);
```

```
B(2,0).init(epsilon,epsilon,e);
B(2,1).init(epsilon,m.init(0,3),e);
```

```
B(3,0).init(epsilon,epsilon,e);
B(3,1).init(epsilon,epsilon,e);
```

On obtient la matrice $B = \begin{pmatrix} \delta^5 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \delta^3 \\ \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}$

pour la matrice C

```
C(0,0).init(epsilon,epsilon,e);
C(0,1).init(epsilon,m.init(0,3),e);
C(0,2).init(epsilon,epsilon,e);
C(0,3).init(epsilon,epsilon,e);
```

```
C(1,0).init(epsilon,epsilon,e);
C(1,2).init(epsilon,epsilon,e);
C(1,0).init(epsilon,epsilon,e);
C(1,3).init(epsilon,m.init(0,1),e);
```

nous avons alors la matrice $C = \begin{pmatrix} \varepsilon & \delta^3 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \delta \end{pmatrix}$

Les trois matrices étant affectées, on peut maintenant calculer la fonction de transfert $H = CA^*B$, nous allons détailler dans la suite toutes les étapes.

On calcule d'abord A^*

```
smatrix H(4,4);
```

```
H=star(A);
```

puis CA^*

```
H=otimes(C,H);
```

pour finir on calcule la fonction de transfert finale CA^*B

```
H=otimes(H,B);
```

Le calcul de H donne $H = \begin{pmatrix} \delta^{12}(\gamma\delta^6)^* & \varepsilon \\ \delta^7(\gamma^2\delta^7)^* & (\delta^6 \oplus \gamma^3\delta^8)(\gamma^4\delta^9)^* \end{pmatrix}$

Classiquement, nous cherchons des contrôleurs de type boucle fermée permettant d'atteindre un modèle de référence [Cottenceau et al., 1999, Lhommeau et al., 2004, Cottenceau et al., 2001]

Nous calculons ci-dessous le calcul d'un modèle de référence $G_{ref} = (HF_0)^*H$ avec $F_0 = \begin{pmatrix} \gamma^3 & \gamma^3 \\ \gamma^3 & \gamma^3 \end{pmatrix}$

```
smatrix F_0(2,2),G_ref(2,2);
F_0(0,0).init(epsilon,m.init(3,0),e);
F_0(0,1).init(epsilon,m.init(3,0),e);
F_0(1,0).init(epsilon,m.init(3,0),e);
F_0(1,1).init(epsilon,m.init(3,0),e);
/* modèle de référence */
G_ref=otimes(H,F_0);
G_ref=star(G_ref);
G_ref=otimes(G_ref,H);
```

On peut donc calculer le correcteur de type retour de sortie optimal. Ce calcul fait appel aux opérations de résiduation et de projection dans l'ensemble des éléments causaux, afin de permettre la réalisation de ce correcteur : $F = Pr_+(H \setminus G_{ref} \not\! / H)$. Dans la partie de programme qui suit, le feedback optimal F est noté F_{opt} .

On calcule d'abord $H \setminus G_{ref}$

```
smatrix F_opt(2,2);
F_opt=lfrac(G_ref,H);
```

puis $H \setminus G_{ref} \not\! / H$

```
F_opt=rfrac(F_opt,H);
```

la dernière étape consiste en la projection de F_{opt} dans l'ensemble des causaux

```
F_opt=prcaus(F_opt);
}
```

On obtient alors le feedback $F = \begin{pmatrix} \gamma^3(\gamma^1\delta^6)^* & \gamma^3 \oplus \gamma^4\delta^2 \oplus \gamma^5\delta^7 \oplus (\gamma^6\delta^{12})(\gamma^1\delta^6)^* \\ \gamma^3\delta(\gamma^1\delta^6)^* & \gamma^3\delta^1 \oplus \gamma^4\delta^3 \oplus \gamma^5\delta^8 \oplus (\gamma^6\delta^{13})(\gamma^1\delta^6)^* \end{pmatrix}$

Une représentation de ce correcteur est donné sur la figure ??.

2.8 Syntaxe générale

La librairie MinMaxgd est composée à partir du type élémentaire suivant : les monômes, ils sont représentés par une classe nommée gd. On peut effectuer quelques opérations élémentaires sur cette classe.

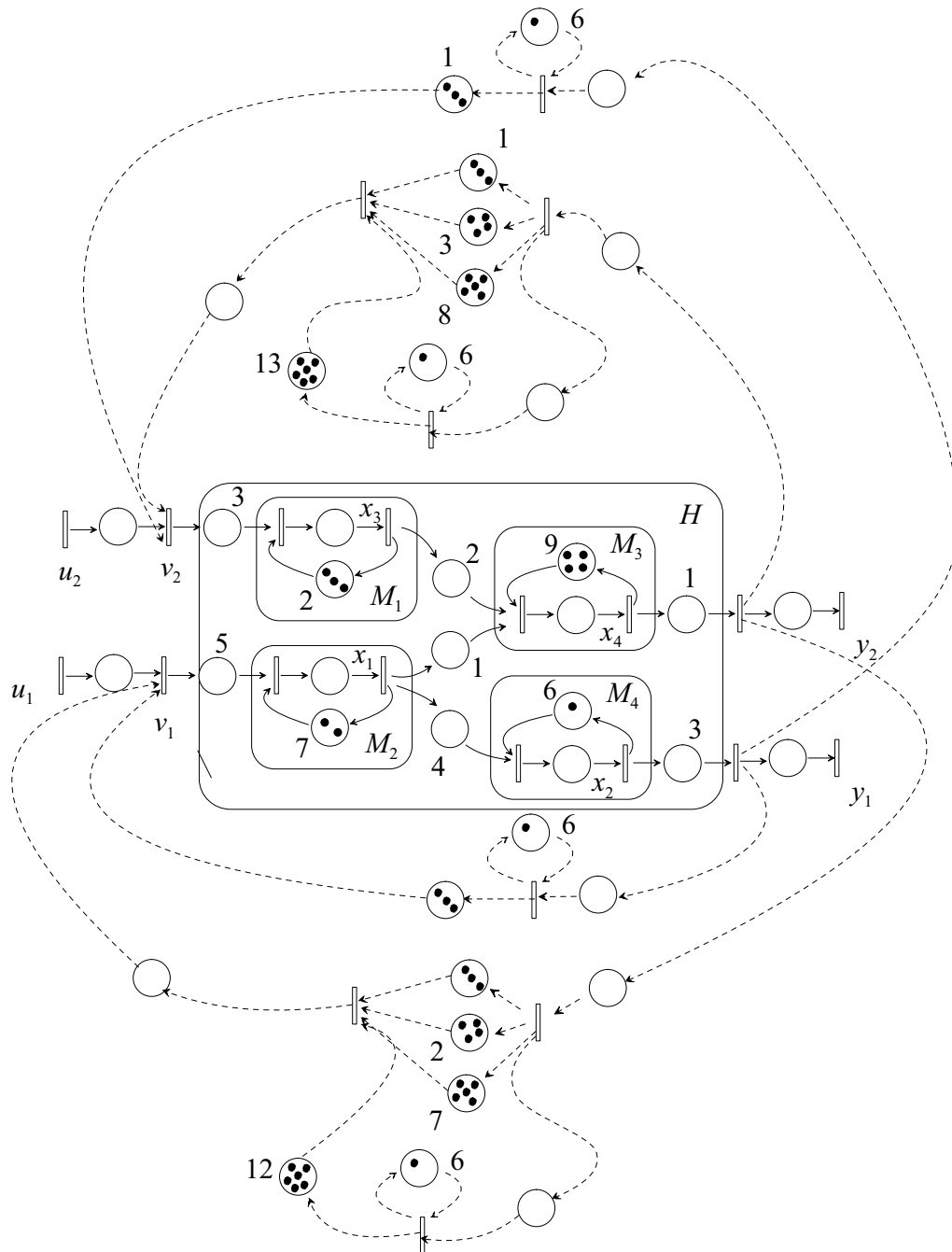


FIG. 2.10 – Exemple de TEG avec un correcteur de type retour de sortie.

2.8.1 Opérations sur les monômes

gd r(2,3)	initialise un monôme $r = \gamma^2\delta^3$
gd r r.init(2,3)	déclare un monôme et lui affecte la valeur $r = \gamma^2\delta^3$
gd inf(gd,gd)	inf de deux monômes
gd otimes(gd,gd)	produit de deux monômes
gd frac(gd,gd)	résiduation de deux monômes
==,! =,<=,>=	opérations de comparaison

Voici un petit exemple d'utilisation des fonctions précédentes

```
void main(void) {
    gd a(2,3);
    gd b,res_otimes,res_inf,res_frac;

    b.init(3,6);

    res_otimes = otimes(a,b);

    res_inf = inf(a,b);

    res_frac = frac(a,b);
}
```

Dans cet exemple $a = \gamma^2\delta^3$ et $b = \gamma^3\delta^6$.

les résultats donnent

- $\text{res_otimes} = a \otimes b = \gamma^5\delta^9$
- $\text{res_inf} = a \wedge b = \gamma^3\delta^3$
- $\text{res_frac} = a \setminus b = \gamma^{-1}\delta^{-3}$

2.9 Calcul rationnel dans $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$

2.9.1 Polynômes

Le type polynôme est représenté par une classe dans laquelle est déclarée un tableau de monômes, on peut donc considérer qu'un polynôme n'est rien de plus qu'un tableau de monômes. L'élément neutre e est codé par un monôme de valeur $e(0,0)$, et l'élément absorbant ε par un monôme de définit comme $\varepsilon(2147483647, -2147483647)$.

On peut effectuer plusieurs types d'opérations sur le type polynôme.

Opérations sur les polynômes

poly p p.init(2,3)(4,5)	déclare un polynôme p par défaut égal à ε initialise un polynôme $p = \gamma^2\delta^3 \oplus \gamma^4\delta^5$
poly oplus(poly,poly)	somme de deux polynômes
poly oplus(poly,gd)	somme d'un polynôme et d'un monôme
poly oplus(gd,poly)	somme d'un monôme et d'un polynôme
poly otimes(poly,poly)	produit de deux polynômes
poly otimes(poly,gd)	produit d'un polynôme et d'un monôme
poly otimes(gd,poly)	produit d'un monôme et d'un polynôme
poly frac(poly,poly)	résiduation de deux polynômes
poly frac(poly,gd)	résiduation d'un polynôme et d'un monôme
poly frac(gd,poly)	résiduation d'un monôme et d'un polynôme
poly inf(poly,poly)	inf de deux polynômes
poly inf(poly,gd)	inf d'un polynôme et d'un monôme
poly inf(gd,poly)	inf d'un monôme et d'un polynôme
poly prcaus(poly)	projection d'un polynôme dans l'ensemble des causaux

Il existe d'autres initialisations pour les polynômes, elles ne sont pas toutes répertoriées dans le tableau. Voici un exemple d'utilisation de cette classe poly.

```
void main(void) {
    poly p1,p2;
    poly res_oplus,res_frac,res_inf,res_otimes;

    p1.init(1,1)(2,3)(4,5);
    p2.init(1,3)(3,3)(8,4);

    res_otimes = otimes(p1,p2);
    res_frac = frac(p1,p2);
    res_inf = inf(p1,p2);
    res_oplus = oplus(p1,p2);
}
```

Dans cet exemple $p1 = \gamma^1\delta^1 \oplus \gamma^2\delta^3 \oplus \gamma^4\delta^5$ et $p2 = \gamma^1\delta^3 \oplus \gamma^3\delta^3 \oplus \gamma^8\delta^4$

pour chacune des opérations on obtient les valeurs suivantes

- $res_otimes = p1 \otimes p2 = \gamma^2\delta^4 \oplus \gamma^3\delta^6 \oplus \gamma^5\delta^8 \oplus \gamma^{12}\delta^9$
- $res_frac = p1 \setminus p2 = \gamma^0\delta^{-2} \oplus \gamma^1\delta^0 \oplus \gamma^3\delta^1$
- $res_inf = p1 \wedge p2 = \gamma^1\delta^1 \oplus \gamma^2\delta^3 \oplus \gamma^8\delta^4$
- $res_oplus = p1 \oplus p2 = \gamma^1\delta^3 \oplus \gamma^4\delta^5$

2.10 Séries périodiques

Les séries périodiques (voir définition 4) sont représentées par une classe, dans laquelle sont déclarés deux polynomes p (le transitoire) et q (le motif), la pente est représentée par un monôme r .

Opérations sur les séries périodiques

serie s s.init(p,q,r)	déclare une série s initialise une série
serie oplus(serie,serie)	somme de deux séries
serie oplus(serie,poly)	somme d'une série et d'un polynôme
serie oplus(poly,serie)	somme d'un polynôme et d'une série
serie oplus(serie,gd)	somme d'une série et d'un monôme
serie oplus(gd,serie)	somme d'un monôme et d'une série
serie otimes(serie,serie)	produit de deux séries
serie otimes(serie,poly)	produit d'une série et d'un polynôme
serie otimes(poly,serie)	produit d'un polynôme et d'une série
serie otimes(serie,gd)	produit d'une série et d'un monôme
serie otimes(gd,serie)	produit d'un monôme et d'une série
serie frac(serie,serie)	résiduation de deux séries
serie frac(serie,poly)	résiduation d'une série et d'un polynôme
serie frac(poly,serie)	résiduation d'un polynôme et d'une série
serie frac(serie,gd)	résiduation d'une série et d'un monôme
serie frac(gd,serie)	résiduation d'un monôme et d'une série
serie inf(serie,serie)	inf de deux séries
serie inf(serie,poly)	inf d'une série et d'un polynôme
serie int(poly,serie)	inf d'un polynôme et d'une série
serie int(serie,gd)	inf d'une série et d'un monôme
serie int(gd,serie)	inf d'un monôme et d'une série
serie star(serie)	étoile de série
serie star(poly)	étoile de polynôme
serie star(gd)	étoile de monôme
serie prcaus(serie)	projection d'une série dans l'ensemble des causaux
void canon()	met une série sous forme canonique

Exemple d'utilisation de ces fonctions

```
void main(void) {
    serie s1,s2,s_otimes,s_frac,s_oplus,s_inf,s_star;
    poly p1,q1,p2,q2;
    gd r1,r2;

    p1.init(1,1)(2,3)(4,5);
    q1.init(10,11)(12,15);
    r1.init(2,3);

    p2.init(1,3)(3,3)(8,4);
    q2.init(10,5)(12,7)(13,9);
    r2.init(4,4);

    s1.init(p1,q1,r1);
```

```

s2.init(p2,q2,r2);

s_otimes = s_otimes(s1,s2);
s_frac = frac(s1,s2);
s_oplus = oplus(s1,s2);
s_inf = inf(s1,s2);
s_star = star(s1);
}

```

Dans cet exemple $s1 = \gamma^1\delta^1 \oplus \gamma^2\delta^3 \oplus \gamma^4\delta^5 \oplus (\gamma^{10}\delta^{11} \oplus \gamma^{12}\delta^{15})(\gamma^2\delta^3)^*$ et $s2 = \gamma^1\delta^3 \oplus \gamma^3\delta^3 \oplus \gamma^8\delta^4 \oplus (\gamma^{10}\delta^5 \oplus \gamma^{12}\delta^7 \oplus \gamma^{13}\delta^9)(\gamma^4\delta^4)^*$

On obtient alors les résultats suivants

$$\begin{aligned}
s_otimes &= s1 \otimes s2 = \gamma^2\delta^4 \oplus \gamma^3\delta^6 \oplus \gamma^5\delta^8 \oplus \gamma^{11}\delta^{14} \oplus (\gamma^{13}\delta^{18})(\gamma^2\delta^3)^* \\
s_frac &= s1 \backslash s2 = \gamma^0\delta^{-2} \oplus \gamma^1\delta^0 \oplus \gamma^3\delta^2 \oplus \gamma^9\delta^8 \oplus (\gamma^{11}\delta^{12})(\gamma^2\delta^3)^* \\
s_oplus &= s1 \oplus s2 = \gamma^1\delta^3 \oplus \gamma^4\delta^5 \oplus \gamma^{10}\delta^{11} \oplus (\gamma^{12}\delta^{15})(\gamma^2\delta^3)^* \\
s_inf &= s1 \wedge s2 = \gamma^1\delta^1 \oplus \gamma^2\delta^3 \oplus \gamma^8\delta^4 \oplus \gamma^{10}\delta^5 \oplus (\gamma^{12}\delta^7 \oplus \gamma^{13}\delta^9)(\gamma^4\delta^4)^* \\
s_star &= s1^* = (\gamma^0\delta^0 \oplus \gamma^1\delta^1)(\gamma^2\delta^3)^*
\end{aligned}$$

La dernière classe, concerne les matrices de séries périodiques.

Opérations sur les matrices de séries périodiques

Un exemple de manipulation de matrices de séries périodiques, a été présenté en introduction, nous allons donc dans cette partie uniquement décrire les fonctions qui composent cette classe, pour l'exemple on se contentera donc de celui de l'introduction.

<code>smatrix sm(4,4)</code>	déclaration d'une matrice (4×4) de séries périodiques
<code>smatrix oplus(smatrix,smatrix)</code>	somme de deux matrices de séries périodiques
<code>smatrix otimes(smatrix,smatrix)</code>	produit de deux matrices de séries périodiques
<code>smatrix lfrac(smatrix,smatrix)</code>	résiduation à gauche de matrices de séries périodiques
<code>smatrix rfrac(smatrix,smatrix)</code>	résiduation à droite de matrices de séries périodiques
<code>smatrix inf(smatrix,smatrix)</code>	inf de matrices de séries périodiques

Bibliographie

- [Abeka, 2005] Abeka, A. (2005). *Utilisation de la transformé de Fenchel pour représenter la dynamique des systèmes (max, +) linéaires*. Dea automatique et informatique appliqué, LISA - Université d'Angers.
- [Baccelli et al., 1992] Baccelli, F., Cohen, G., Olsder, G., and Quadrat, J. (1992). *Synchronization and Linearity : An Algebra for Discrete Event Systems*. Wiley and Sons.
- [Cohen, 1993] Cohen, G. (1993). Two-dimensional domain representation of timed event graphs. In *Summer School on Discrete Event Systems*. Spa, Belgium.
- [Cohen et al., 1989] Cohen, G., Moller, P., Quadrat, J., and Viot, M. (1989). Algebraic Tools for the Performance Evaluation of Discrete Event Systems. *IEEE Proceedings : Special issue on Discrete Event Systems*, 77(1) :39–58.
- [Cottenceau, 1999] Cottenceau, B. (1999). *Contribution à la commande de systèmes à événements discrets : synthèse de correcteurs pour les graphes d'événements temporisés dans les dioïdes*. Thèse, LISA - Université d'Angers.
- [Cottenceau et al., 1999] Cottenceau, B., Hardouin, L., Boimond, J.-L., and Ferrier, J.-L. (1999). Synthesis of greatest linear feedback for Timed Event Graphs in dioid. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 44, n°6 :1258–1262.
- [Cottenceau et al., 2001] Cottenceau, B., Hardouin, L., Boimond, J.-L., and Ferrier, J.-L. (2001). Model reference control for timed event graphs in dioids. *Automatica*, vol. 37 :1451–1458.
- [Gaubert, 1992] Gaubert, S. (1992). *Théorie des Systèmes Linéaires dans les Dioïdes*. Thèse, École des Mines de Paris.
- [Gruet, 1995] Gruet, B. (1995). *Structure de commande en boucle fermée des systèmes à événements discrets*. DEA, LISA - Université d'Angers - France.
- [Lhommeau et al., 2004] Lhommeau, M., Hardouin, L., Cottenceau, B., and Jaulin, L. (2004). Interval analysis and dioid : Application to robust controller design for timed event graphs. *Automatica*, 40 :1923–1930.

